Yliopisto-opiskelijan virheet todistamisessa ja todistamisen kehittyminen kurssin aikana

Henri Clement

Matematiikan pro gradu

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Huhtikuu 2019

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä — Författare — Author

Henri Clement

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Yliopisto-opiskelijan virheet todistamisessa ja todistamisen kehittyminen kurssin aikana

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Huhtikuu 2019	48 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Todistaminen on matemaattisen tiedon perusta ja matemaattinen tieto lisääntyy todistusten avulla – pohjimmiltaan matematiikka rakentuu määritelmien ja niistä johdettujen lauseiden varaan. Todistaminen on kuitenkin peruskoulussa ja vielä lukiossakin paljon vähemmän esillä oleva matematiikan osa-alue kuin yliopisto-opinnoissa.

Tutkielmassa tutustutaan todistustekniikoiden lisäksi aikaisempaan kirjallisuuteen todistamisesta. Todistamisajattelu kehittyy vaiheittain ja aloittelevilla opiskelijoilla on hankaluuksia välillä jo todistusten lukemisen kanssa. Tutkielmassa esitetään aikaisempaan kirjallisuuteen viitaten, miten todistamisajattelun voidaan ajatella kehittyvän ja mitkä ajattelun osa-alueet ovat oleellisia matemaattiselle ajattelulle. Matemaattinen todistaminen vaatii osaamista sekä todistamistekniikoista että sisältötietoa todistettavan asian matematiikan osa-alueesta.

Tässä työssä tutkitaan yliopisto-opiskelijoiden todistamista kahdella aineopintoihin sisältyvällä kurssilla. Pääsääntöisesti kyseiset kurssit ovat opiskelijoilla ohjelmassa ensimmäisen lukukauden aikana. Aineistona on opiskelijoiden kurssin aikana palauttamia todistamiseen liittyviä tehtäviä. Tutkimukseen valittiin systemaattisella otannalla 15 opiskelijaa, joilta kaikilta analysoitiin neljä todistamistehtävää teoriaohjaavan sisällönanalyysin menetelmällä. Opiskelijoiden todistuksia tarkasteltaessa keskitytään todistuksen rakenteen ja merkintöjen lisäksi myös päättelyiden matemaattiseen oikeellisuuteen. Lisäksi tutkitaan, miten yksittäisen opiskelijan todistusten tekeminen kehittyy kurssien aikana.

Tutkimuksessa tutkituista todistuksista hieman yli kolmannes oli tutkielman määritelmien mukaan kokonaisuudessaan hyväksyttyjä todistuksia. Suurin osa opiskelijoiden virheistä näissä tutkituissa todistuksissa liittyi merkintöihin sekä selkeästi muotoiltuihin määritelmiin. Todistuksista hieman yli puolet oli matemaattiselta päättelyltään johdonmukaisia ja hyväksyttäviä käytettyjen kriteereiden mukaan. Yksittäisen opiskelijan todistamisen kehittymisessä ei ollut tässä tutkimuksessa havaittavissa säännönmukaista kehitystä kuin parin yksittäisen opiskelijan kohdalla.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Todistaminen, virheet todistuksissa, todistamisen kehittyminen, yliopistomatematiikka

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Opiskelujen aikana alakoulusta yliopistoon matematiikan luonne muuttuu lähes täysin. Peruskoulun opetussuunnitelmien 2004 [23] ja 2014 [24] mukaan ensimmäisten vuosien aikana pyritään ymmärtämään lukumäärän käsite, peruslaskutoimitukset ja opitaan kertotaulut. Alakoulun myöhemmillä luokilla on edelleen peruslaskutoimituksia, mutta tässä vaiheessa lukualue on laajentunut sekä mukana on myös desimaaliluvut ja murtoluku-ja. Viimeistään yläasteella esitellään kirjaimet matematiikassa ja harjoitellaan polynomilausekkeiden sieventämistä sekä potenssien laskusääntöjä. Lisäksi opetellaan yhtälöiden ja yhtälöparien algebrallinen ratkaiseminen. Opetussuunnitelmissa mainitaan myös peruskoulun viimeisten vuosiluokkien osalta todistamisten pohjustaminen. Vähän enemmän todistamista on vasta lukiossa [22, 25]. Lukiossakin useammalla lukiokurssilla todistaminen jättäytyy vähemmälle muiden oppisisältöjen puristuksessa kurssin ajankäytön raameissa [36]. Laskeminen ja laskimen käyttö on kokemuksieni mukaan isossa roolissa lukio-opinnoissa. Ylioppilastutkinnon uudistuessa 2019 myös matematiikan kirjoittaminen sähköisesti sekä tietokone apuvälineenä saanee suurempaa roolia lukio-opinnoissa. Sen sijaan yliopistolla harvalla perus- tai aineopintojen kurssilla on käyttöä laskimelle. Matematiikan rooli on muuttunut täysin opintojen kaaren aikana.

Yliopisto-opinnoissa todistaminen on isossa osassa ja Helsingin yliopistolla käydään heti perusopintojen kurssilla Johdatus yliopistomatematiikkaan [21] perusteellisesti läpi todistustekniikoita. Lukiossa todistaminen on vielä selvästi pienemmässä osassa kuin yliopistolla ja yleisesti todistamisen merkitys lukio-opinnoissa on vuosien varrella vähentynyt, vaikka se uusimmassa opetussuunnitelmassa [25] on jälleen hieman isommassa roolissa aikaisempaan [22] verrattuna.

Todistaminen on kuitenkin matematiikan ytimessä. Matematiikka rakentuu pohjimmiltaan aksioomien, määritelmien ja näistä johdettujen lauseiden varaan. Lauseet todistetaan joko pohjautuen suoraan aksioomiin tai näistä aikaisemmin johdettuihin lauseisiin ja määritelmiin, jolloin matemaattinen tieto lisääntyy. Jos päättely on tehty matemaattisesti oikein, eivät uudet tutkimustulokset voi kumota aikaisempaa tietoa. [10, 38]

Tässä työssä tutkin, minkälaiset virheet ovat aloittelevien yliopisto-opiskelijoiden todistuksissa yleisimpiä ja näkyykö todistamisessa kehittymistä puolen vuoden aikana olevien perus- ja aineopintojen tasoisten kurssien aikana.

Luvussa 2 on määritelty todistaminen matematiikassa, esitelty erilaiset todistustekniikat sekä mitä eri merkityksiä todistamisella on olemassa. Luvussa 3 katsastetaan, miten suomalaisen lukion opetussuunnitelmassa todistaminen nähdään ja paneudutaan enemmän todistamisen pedagogiseen osaan ja todistamisajattelun kehittymiseen. Sen jälkeen luvussa 4 on kuvailtuna tutkimusasetelma sekä tehtävät, joiden avulla tutkimus on tehty. Luvussa 5 on esitelty tutkimuksen tulokset ja viimeisessä luvussa 6 on tulosten pohdintaa sekä tutkimuksen luotettavuuden arviointia.

Luku 2

Todistaminen matematiikassa

Tässä luvussa esitellään ensin kappaleessa 2.1 mitä matematiikassa todistamisella tarkoitetaan ja minkälaisia vaiheita todistamiseen liittyy. Kappaleessa 2.2 on esitelty yleisimmät todistustekniikat sekä logiikkaan pohjautuva päättely näiden taustalla. Samassa kappaleessa on myös hieman logiikan ja todistamisen historiasta. Lopuksi kappaleessa 2.3 on esitelty, mitä erilaisia merkityksiä todistamisella ajatellaan olevan ja minkälaisiin eri kategorioihin erilaisia todistuksia on mahdollista jakaa.

2.1 Mikä matemaattinen todistus on?

Griffiths [7] toteaa artikkelissaan, että matematiikassa todistamisella on vastaava rooli totuuden varmentamisessa kuin luonnontieteissä kokeilla tai havainnoilla. Hänen mukaansa todistaminen on matematiikan tieteessä keskiössä uuden tiedon luomisessa ja löytyneen tiedon varmistamisessa. Griffithsin määrittely matemaattiselle todistukselle on vastaava, joka annetaan myös lukion pitkän matematiikan kurssikirjassa *Tekijä Pitkä Matematiikka 11 – Lukuteoria ja todistaminen* [10]:

> Matemaattinen todistus on looginen ja formaali päättelyketju, joka lähtee liikkeelle aksioomista ja loogisten vaiheiden jälkeen päätyy johtopäätökseen.

Griffithsin [7] mukaan näin matemaattinen tieto kasaantuu ja todistetun tiedon oikeellisuus on pysyvää. Kyseinen määritelmä on myös Weberin [38] mukaan yleisesti jaettu näkemys opiskelijoiden ja opettajien keskuudessa. Griffiths vertaa, että luonnontieteissä uudet havainnot saattavat kumota aikaisemman teorian ja toteaa, että osa matematiikan lauseista on ollut pysyviä antiikin Kreikasta asti, kuten Eukleideen geometriset todistukset.

Useampien matematiikkojen mukaan todistuksia on kuitenkin eri luonteisia ja täysin matemaattisen formaalin todistuksen luominen ei ole aina edes käytännöllistä. Hershin [13] mukaan formaali todistus voi monissa tilanteissa olla käytännössä mahdoton ajankäytön ja vaivan kannalta. Renz [27] kertoo artikkelissaan, kuinka Pythagoraan lauseen formaali todistus aloittaen Hilbertin aksioomista olisi lähes 80 sivua pitkä.

Näiden pohjalta voitaisiin siis ajatella, että jokainen täydellisesti rakennettu todistus lähtee aina Griffithsin määritelmän mukaisesti aksioomista ja todistaa kaikki vaiheet matkan varrella päätyessään johtopäätökseen. Kuitenkin todistamiseen liittyvissä artikkeleissa tulee käytännössä ilmi, että harvoin pyritään matemaattiseen täydellisyyteen. Monessa todistuksessa käytetään oletuksena yleisesti tunnettuja määritelmiä ja yleisesti hyväksyttyjä todistustekniikoita, jollin todistuksista saadaan järkevän mittaisia ja paremmin luettavia.

CadwalladerOlsker [4] kirjoittaa artikkelissaan, että käytännössä useimmat todistukset ovatkin subjektiivisia ja niiden tavoitteena on vakuuttaa matematiikan yhteisö tutkimustuloksesta eikä matemaattinen täydellisyys ole päämäärä. Puolestaan Hershin [13] mukaan matematiikkojen maailmassa todistus on pätevä argumentti, jonka ovat hyväksyneet pätevät tuomarit eli matemaattinen yhteisö. Thurston [34] on sitä mieltä, että todistuksen luotettavuus ei ensisijaisesti edes tule todistuksen formaalista puolesta, vaan matematiikkojen huolellisesta ja kriittisestä suhtautumisesta uusia ideoita kohtaan. Itse asiassa hänen mielestään matemaatikot ovat parempia huomaamaan mahdolliset erheet ja heikkoudet todistuksessa kuin arvioimaan todistuksen muodollista täydellisyyttä.

Thurston [34] kuvaa artikkelissaan, kuinka hän oppi ymmärtämään matemaattisen todistamisen maailman ja miten hän sen kokee:

> Within any field, there are certain theorems and certain techniques that are generally known and generally accepted. When you write a paper, you refer to these without proof. You look at other papers in the field, and you see what facts they quote without proof, and what they cite in their bibliography. You learn from other people some idea of the proofs. Then you're free to quote the same theorem and cite the same citations. You don't necessarily have to read the full papers or books that are in your bibliography. Many of the things that are generally known are things for which there may be no known written source. As long as people in the field are comfortable that the idea works, it doesn't need to have a formal written source.

Vaikka artikkeleista jää kokonaisvaikutelma, että matemaattista todistamista pidetään hyvänä ja pätevänä, löytyy siitä myös puutteita. Renz [27] muistuttaa artikkelissaan, että jotkut todistukset sisältävät piilotettuja oletuksia ja todistusten lukemisessa tulisi olla huolellinen. Matemaattinen todistaminen ei käytännössä siis ole täysin formaalia eli aukottomasti kaikki asiat todistuksessa todistettuja. Thurstonin [34] mukaan matematiikka on silti paljon formaalimpaa ja tarkempaa kuin monet muut tieteet, mutta paljon vähemmän formaalimpaa ja tarkempaa kuin tietokoneohjelmointi.

Todistuksen kirjoittamisella ja ulkoasulla on myös oma rooli todistuksen lukemisessa. Thurston [34] toivoo matemaatikkojen olevan huolellisia todistusten kanssa ja tekevänsä niistä niin selkeitä, että mahdolliset virheet on helppo havaita. Hanna [8] puolestaan on opiskelijoiden suhteen havainnut, että liiallinen matemaattinen formalisointi ja täydellisyys todistamisessa voi jopa sekoittaa opiskelijaa.

Thurston [34] kuvaili aikaisemmassa lainauksessa oppimisprosessiaan matemaattiseen todistamiseen. Todistuksissa usein tietyt tekniikat ovat yleisesti hyväksyttyjä ja jotkut totuudet oletetaan jo tunnetuiksi. Vaikka joidenkin todistustekniikoiden oikeellisuus perustellaan kappaleessa 2.2 nojaten matemaattiseen logiikkaan, täydellisen formaalit ja aina aksioomista lähtevät todistukset eivät tässä tutkielmassa ole mielekkäitä. Esimerkiksi tieto, että parillinen kokonaisluku a voidaan ilmaista muodossa $a = 2m, m \in \mathbb{Z}$ ja pariton kokonaisluku b muodossa $b = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}$ otetaan käyttöön ilman todistuksia. Tässä tutkielmassa siis matemaattista todistusta käytetään pitkälti, kuten Thurston sen kuvaili.

Kirjassa *Thinking mathematically* (Mason et al.) [17, s. 87] on hieman yksinkertaistettu mielikuva todistamisen vaiheista. Kyseisessä kirjassa todistaminen nähdään kolmessa vaiheessa: ensin vakuuta itsesi, sen jälkeen kaverisi, ja viimeisenä vihollisesi. Kirja on kirjoitettu matemaattisista lähtökohdista, mutta kohdeyleisönä ei ole matemaatikot. Kirja yrittää tehdä matematiikasta selkokielisempää ja tuntuu olevan jopa hieman popularisoiva. Jotta voidaan vakuuttaa matemaattinen yhteisö, oli se sitten kaveri tai vihollinen, lienee järkevä ottaa mukaan Tallin [32] vaatimukset matemaattiselle todistukselle:

- selkeästi muotoillut määritelmät ja väitteet sekä
- hyväksytyt toimenpiteet, joilla johdetaan uuden väitteen totuus edellisestä.

2.2 Todistustekniikoita

Tampereen yliopiston logiikan peruskurssin kurssimateriaalin [28] mukaan logiikkaa voidaan pitää tieteenä, joka tutkii päätelmiä ja pyrkii erottamaan pätevät päätelmät epäpätevistä. Logiikka yrittää vastata kysymykseen, millä perustein pätevä ja epäpätevä päättely voidaan erottaa toisistaan. Logiikka myös tutkii totuuden käsitettä ja mitä tarkoittaa, jos väittämä on tosi, epätosi tai yleispätevä. Voidaan ajatella, että logiikka tutkii erilaisten väittämien ja ympäristön välistä suhdetta.

Tässä kappaleessa tarkastelemme logiikan historiaa ja joitakin todistustekniikoita, joiden oikeellisuus voidaan perustella matemaattisen logiikan avulla. Todistustekniikoita käsittelevien kappaleiden (2.2.2 - 2.2.5) kirjoittamisen apuna on käytetty yliopiston kurssimonisteita Johdatus yliopistomatematiikkaan [21], Logiikan peruskurssi [28] sekä lukion oppikirjaa Tekijä Pitkä matematiikkaa 11 – Lukuteoria ja todistaminen [10].

Todistustekniikoista suora todistaminen ja kontrapositiotodistus sopivat erityisesti muotoa jos. . . niin -olevien väitteiden ($P \Rightarrow Q$) todistamiseen. Jos ja vain jos -muotoiset väitteet ($P \Leftrightarrow Q$) voidaan todistaa todistamalla jos. . . niin -väite molempiin suuntiin ($P \Rightarrow Q$ ja $Q \Rightarrow P$). Ristiriitatodistus sopii näiden väitteiden lisäksi hyvin myös yksittäisen väitelauseen oikeaksi tai vääräksi todistamiseen. Induktiotodistus soveltuu hyvin, jos pitää osoittaa jollekin kokonaislukujen tai luonnollisten lukujen joukolle tietty ominaisuus.

2.2.1 Logiikka todistamisen takana

Tämän historiaosuuden lähteenä on Niinisalon artikkeli *Logiikan historia* vuodelta 2015 [20], jonka alkuperäinen versio on ilmestynyt 1978 Otavan suuressa ensyklopediassa.

Aristoteles (384-322 eaa.) ei käyttänyt käsitettä logiikka, mutta yleisesti hänestä aloitetaan logiikan historia. Aristoteles julkaisi useampia logiikka tutkivia teoksia, kuten *Toinen analytiikka*, jonka mukaan jokaisella tieteenalalla tieto voidaan ilmaista aksiomaattisena järjestelmänä. Siis aksioomista on loogisesti johdettavissa teoreemat. Eukleides julkaisi aksiomaattisen geometrian teoksessaan *Alkeet* (n. 300 eaa.).

Niiniluodon mukaan logiikan historia voidaan karkeasti jakaa kolmeen luovaan ja kahteen pysähtyneisyyden vaiheeseen. Ensimmäinen luova vaihe oli juuri antiikin aikana. Loogikko Khrysippos (281-205 eaa.) loi viisi päättelyn peruskaava, joista ensimmäinen tunnetaan latinankielisellä nimellä *modus ponens* ja on suoran todistuksen logiikka: *Jos ensimmäinen, silloin toinen, mutta ensimmäinen, siis toinen.*

Toinen luova vaihe oli keskiajalla. Tällöin logiikka oli riippuvainen antiikin perinteestä ja muun muassa teologiset kiistat vaikuttivat myös logiikan esitykseen ja kehitykseen. Keskiajalla tärkeitä aiheita oli muun muassa sellaisten propositioiden analysoiminen, joissa esiintyi luonteenomaisia epäselvyyksiä. Esimerkiksi jo antiikin aikana kehitetty valehtelijaparadoksi: kun mies sanoo *minä valehtelen*, puhuuko hän totta. Paul Venetsialainen (n. 1372-1429) kirjoitti kirjan *Logica magna*, joka käsitteli logiikkaa huolitellusti.

Modernin logiikan kultakausi alkoi 1800-luvun puolivälissä, kun logiikkaa alettiin tutkia matemaattisin menetelmin ja tuloksena oli Boolen looginen algebra. Logiikka otettiin myös välineeksi matematiikan perusteiden tutkimuksessa. Tässä kunnostautui erityisesti saksalainen Gottlob Frebe (1848-1925), jota pidetään nykyään usein aikakautensa suurimpana loogikkona. Frebe kehitteli loogisen kirjoitusjärjestelmän, jossa olivat käytössä kvanttorit. Näiden avulla lauseiden ja todistusten looginen rakenne oli mahdollista esittää aikaisempaa selvemmin. Italialainen Giuseppe Peano (1858-1932) kehitti vielä käyttökelpoisemman loogisten merkkien järjestelmän, jonka muun muassa Bertrand Russell (1872-1970) omaksui. Russell ja Alfred North Whitehead (1861-1947) julkaisivat yhdessä teoksen *Principa mathematica*. Teoksessa matematiikka pyrittiin aksiomatisoimaan ja matematiikan peruskäsitteet tulkitsemaan uudelleen logiikan kielellä.

Viimeisen vajaan vuosisadan aikana logiikan tutkimus on ollut laajaa monissa suunnissa. Näitä suuntia on esimerkiksi malliteoria, kombinatorinen logiikka ja todistusteoria. Lisäksi on syntynyt yleisiä teorioita ja lähestymistapoja, jotka pyrkivät selvittämään logiikan laajennusten välisiä suhteita.

Taulukossa 2.1 on yleisimpien loogisten konnektiivien (negaatio, konjunktio, disjunktio, implikaatio, ekvivalenssi) totuustaulut.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Taulukko 2.1: Yleisimpien loogisten konnektiivien totuustaulut. [28]

2.2.2 Suora todistus

Tautologia on logiikassa lause, joka on aina tosi. Suoran todistuksen tekniikka perustuu tautologiaan. Suorassa todistamisessa lähdetään liikkeelle oletuksista (P), joiden avulla johdetaan väite (Q). Loogisilla merkeillä esitettynä suora todistaminen perustuu tautologiaan

$$(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q.$$

Kyseinen tautologia voidaan todeta totuustaulujen avulla.

P	Q	$P \wedge Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \wedge (P \Rightarrow Q)$	$P \wedge ((P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	1

Esimerkki 2.1. Osoita, että jos p on pariton kokonaisluku, niin p^3 on pariton.

Todistus. Oletetaan, että p on pariton kokonaisluku. Tällöin se voidaan kirjoittaa muodossa $p = 2n + 1$, missä $n \in \mathbb{Z}$. Nyt

$$p^3 = (2n+1)^3 = 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 = 2(4n^3 + 6n^2 + 3n) + 1,$$

missä $4n^3 + 6n^2 + 3n \in \mathbb{Z}$. Tällöin p^3 on kaksi kertaa jokin kokonaisluku, johon lisätään yksi. Eli luku p^3 on pariton. $\square$

2.2.3 Käänteinen todistus eli kontrapositiotodistus

Logiikassa kahden loogisesti ekvivalentin lauseen totuusarvo on aina sama. Esimerkiksi lauseet $\neg Q \Rightarrow \neg P$ ja $P \Rightarrow Q$ ovat loogisesti ekvivalentit eli

$$(\neg Q \Rightarrow \neg P) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q).$$

Tätä havaintoa käytetään hyväksi käänteisessä todistuksessa eli kontrapositiotodistuksessa. Käänteisessä todistuksessa lähdetään liikkeelle väitteen (Q) negaatiosta, josta johdetaan oletuksen (P) negaatio, mikä todistaa väitteen (Q) oikeaksi, siis

$$(P \wedge (\neg Q \Rightarrow \neg P)) \Rightarrow Q.$$

Kyseinen tautologia voidaan perustella totuustaulun avulla.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$	$P \wedge (\neg Q \Rightarrow \neg P)$	$(P \wedge (\neg Q \Rightarrow \neg P)) \Rightarrow Q$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1

Esimerkki 2.2. Osoita kontrapositiotodistuksen avulla, että jos p^3 on pariton kokonaisluku, niin p on pariton.

Todistus. Oletetaan vastoin väitettä, että p on parillinen. Tällöin $p = 2n$, missä $n \in \mathbb{Z}$, jolloin

$$p^3 = (2n)^3 = 8n^3 = 2(4n^3),$$

missä $4n^3 \in \mathbb{Z}$. Siis saatu luku on parillinen. On saatu, että jos väite on epätosi, niin oletus on epätosi. Siis alkuperäinen väite on tosi. $\square$

2.2.4 Ristiriitatodistus

Ristiriitatodistuksessa oletetaan oletuksen (P) lisäksi, että väitteen (Q) negaatio olisi totta. Jos näistä oletuksista saadaan johdettua ristiriita (A ja $\neg A$), saadaan alkuperäinen väite todistettua. Loogisena propositiolauseena tämä olisi

$$(((P \wedge \neg Q) \Rightarrow (A \wedge \neg A)) \wedge P) \Rightarrow Q.$$

Lauseen totuustaulusta nähdään tautologia.

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$A \wedge \neg A$	$(P \wedge \neg Q) \Rightarrow (A \wedge \neg A)$	$((P \wedge \neg Q) \Rightarrow (A \wedge \neg A)) \wedge P)$
1	1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0

Q	$((P \wedge \neg Q) \Rightarrow (A \wedge \neg A)) \wedge P)$	$(((P \wedge \neg Q) \Rightarrow (A \wedge \neg A)) \wedge P) \Rightarrow Q$
1	1	1
0	0	1
1	0	1
0	0	1

Esimerkki 2.3. Osoita, että $x^2 + 2x + 2 \geq 1$, jos $x > -1$.

Todistus. Oletetaan, että $x > -1$. Lisäksi vastoin väitettä oletetaan, että $x^2+2x+2 < 1$.

Koska $x > -1$, niin $x + 1 > 0$. Korottamalla yhtälön molemmat puolet potenssiin kaksi, saadaan $(x + 1)^2 > 0$.

Koska $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$, saadaan jälkimmäisestä oletuksesta $(x + 1)^2 + 1 < 1$. Nyt vähentämällä 1 molemmilta puolilta saadaan $(x + 1)^2 < 0$.

Yhdistämällä epäyhtälöt saadaan $0 < (x + 1)^2 < 0$, mikä on ristiriita. On osoitettu alkuperäinen väite todeksi. □

Ristiriitatodistusta voidaan käyttää myös pelkän väitteen todistamiseen, vaikka väite ei olisikaan muotoa jos. . . niin. Lähdetään liikkeelle väitteen (Q) negaatiosta, josta johdetaan ristiriita (A ja $\neg A$). Tämä riittää alkuperäisen väitteen todistamiseen. Loogisena propositiolauseena tämä olisi

$$Q \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow (A \wedge \neg A)).$$

Totuustaulusta nähdään, että lauseet ovat loogisesti ekvivalentit eli kyseinen ekvivalenssi on tautologia.

Q	A	$\neg A$	$\neg Q$	$A \wedge \neg A$	$\neg Q \Rightarrow (A \wedge \neg A)$	$Q \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow (A \wedge \neg A))$
1	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1

Esimerkki 2.4. Osoita, että $\sqrt{6}$ on irrationaaliluku.

Todistus. Oletetaan vastoin väitettä, että $\sqrt{6}$ on rationaaliluku. Rationaaliluku voidaan esittää supistettuna murtolukuna $\sqrt{6} = \frac{m}{n}$, missä $m, n \in \mathbb{Z}$ ja $n \neq 0$. Koska murtoluku on supistettu, vähintään toinen luvuista m ja n on pariton.

Korottamalla yhtälön $\frac{m}{n} = \sqrt{6}$ molemmat puolet potenssiin kaksi saadaan $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = (\sqrt{6})^2$, joka voidaan edelleen sieventää muotoon $\frac{m^2}{n^2} = 6$. Kertomalla yhtälö puolittain luvulla n^2 ja jakamalla oikea puoli tekijöihin saadaan $m^2 = 2(3n^2)$.

Koska yhtenä tekijänä on 2, luku m^2 on parillinen. Tällöin myös m on parillinen eli on olemassa $k \in \mathbb{Z}$ siten, että $m = 2k$. Sijoittamalla tämä m paikalle yhtälöön, saadaan $(2k)^2 = 2(3n^2)$, josta edelleen $4k^2 = 6n^2$. Kun yhtälö jaetaan vielä puolittain kahdella, saadaan $2k^2 = 3n^2$.

Tämän mukaan luku $3n^2$ on parillinen. Pariton luku kerrottuna parittomalla on pariton, joten n^2 on oltava parillinen, jolloin myös n on parillinen. On päädytty ristiriitaan, koska aiemmin todettiin, että vain toinen luvuista m ja n voi olla parillinen. Siis $\sqrt{6}$ on irrationaaliluku. □

2.2.5 Induktiotodistus

Induktiotodistuksen avulla voidaan todistaa luonnollisia lukuja koskevia väitteitä. Induktioperiaatteen mukaan kaikilla luonnollisilla luvuilla on ominaisuus P, jos

- luvulla 0 on ominaisuus P,
- oletuksesta "luvulla n on ominaisuus P" seuraa, että luvulla $n+1$ on myös ominaisuus P.

Induktiotodistus koostuu kahdesta vaiheesta

- *alkuaskeleessa* osoitetaan, että väite pätee luvulla 0 (tai tutkittavan lukualueen pienimmällä luvulla)

- *induktioaskeleessa* oletetaan, että väite pitää paikkansa mielivaltaisella luvulla k, joka kuuluu tarkasteltavaan lukujoukkoon ja osoitetaan, että tällöin väite pätee myös luvulle $k + 1$.

Näiden kahden ehdon täyttyessä voidaan induktioperiaatteen nojalla todeta alkuperäinen väite todeksi.

Esimerkki 2.5. Osoita, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n pätee $(a + b)^n \geq a^n + b^n$, kun a ja b ovat positiivisia kokonaislukuja.

Todistus. Tehdään alkuaskel ja osoitetaan, että väite pätee lukujoukon pienimmällä luvulla $n = 1$. Tällöin saadaan, että

$$(a + b)^n = (a + b)^1 = a + b = a^1 + b^1 = a^n + b^n.$$

Siis alkuperäinen väite pätee, kun $n = 1$.

Induktioaskelta varten oletetaan, että alkuperäinen väite pätee, kun n on mikä tahansa positiivinen kokonaisluku.

Nyt $(a + b)^{n+1} = (a + b) \cdot (a + b)^n$ ja induktio-oletuksen mukaan

$$(a + b) \cdot (a + b)^n \geq (a + b) \cdot (a^n + b^n).$$

Epäyhtälön oikea puoli voidaan muokata muotoon

$$(a + b) \cdot (a^n + b^n) = a^{n+1} + ab^n + ba^n + b^{n+1}.$$

Koska a ja b ovat positiivisia kokonaislukuja, niin $ab^n + ba^n \geq 0$. Siis

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \cdot (a+b)^n \geq (a+b) \cdot (a^n + b^n) = a^{n+1} + ab^n + ba^n + b^{n+1} \geq a^{n+1} + b^{n+1}.$$

Induktioväite $(a+b)^{n+1} \geq a^{n+1} + b^{n+1}$ on tosi. Alkuaskeleesta ja induktioaskeleesta seuraa induktioperiaatteen mukaisesti, että alkuperäinen väite on tosi. $\square$

2.3 Todistamisen eri merkityksiä

Useiden matemaatikkojen mielestä todistamisella on monia muitakin merkityksiä kuin lauseiden todistaminen tai totuuden varmentaminen. Weber [38] on kirjoituksessaan koonnut eri lähteistä useampia tarkoituksia, joita todistamisella voidaan ajatella olevan.

- *Selitys.* Käymällä todistuksen läpi lukija pystyy ymmärtämään, miksi väite on totta.
- *Systematisointi.* Todistuksia voi käyttää yhdistämään aiemmin erillään olleet tulokset keskenään toisiinsa.
- *Kommunikaatio.* Todistamisen kieltä voidaan käyttää välittämään ideoita muun muassa opiskelijoiden ja matemaatikkojen välillä sekä voidaan käyttää väittelyn työkaluna.
- *Uusien tulosten löytäminen.* Tutkimalla aksioomia, määritelmiä ja näistä seuraavia loogisia johtopäätöksiä, voidaan kehittää uusia malleja ja teorioita.
- *Määritelmän perustelu.* Määritelmä on riittävä osoittamalla, että kaikki käsitteen olennaiset ominaisuudet voidaan johtaa ehdotetusta määritelmästä.
- *Intuition kehittäminen.* Tarkastelemalla käsitteen määritelmän loogisia seurauksia voi joskus kehittyä myös intuitiivinen käsitys käsitteestä.
- *Autonomian tarjoaminen.* Opiskelijoiden kehittyminen todistamisessa mahdollistaa opiskelijoiden rakentavan uutta matemaattista tietoa itsenäisesti.

Vaikka matematiikan kieli on oleellinen kommunikaatioväline opettajien ja opiskelijoiden välillä, en koe, että omissa yliopisto-opinnoissa todistamisen kieltä sinällään olisi erityisesti käytetty kommunikaation välineenä. Omien kokemusten perusteella todistukset luennoilla ja harjoituksissa toki tukivat todistamisen ja todistusajattelun kehittymistä, mutta ensisijaisesti todistuksia käytettiin selityksinä sekä määritelmien perusteluina. Todistamisen opettaminen tarjoaa eräänlaista autonomiaa todistustehtäviin, vaikka se ei vielä yliopistotasolla käytännössä johdakaan uuden matemaattisen tiedon rakentamiseen.

Yleinen jaottelu on myös todistusten jakaminen kahteen kategoriaan – todistuksiin, jotka vakuuttavat ja todistuksiin, jotka selittävät. Tätä jaottelua käyttävät muun muassa Hersh [13] ja CadwalladerOlsker [4]. Hershin mukaan matematiikan tutkimuksessa todistuksen päärooli on olla vakuuttava, mutta vielä lukiotasolla todistamisen päärooli on olla selittävä. Samantyylistä jakoa käyttää myös Hanna [8], joka kirjoittaa formaaleista todistuksista ja selittävistä todistuksista. Hanna miettii artikkelissaan todistamista kokonaisuudessaan kolmeen kategoriaan jaoteltuna:

- formaali todistus,
- hyväksyttävä todistus (sisältää formaalit ja selittävät todistukset) sekä
- todistamista opettava todistus.

Hanna laskee sekä formaalit että selittävät todistukset hyväksyttäviksi todistuksiksi, sillä ne on yleisesti hyväksytty matemaatikkojen mielestä. Myös hänen mielestään hyväksyttävä todistus on sellainen, joka on riittävä päteville matemaatikoille. Esimerkkitodistusten avulla on näytetty mitä Hanna tarkoittaa formaalilla todistuksella esimerkissä 2.6 ja mitä selittävällä todistuksella esimerkissä 2.7.

Esimerkki 2.6. Hannan tarkoittama formaali todistus. Osoita, että kun n ensimmäistä positiivista kokonaislukua lasketaan yhteen, summa on $S(n) = n(n+1)/2$.

Todistus. Tehdään todistus matemaattisella induktiolla. Kun $n = 1$, niin $1(1+1)/2 = 1$ eli väite pätee. Oletetaan, että väite pätee positiiviselle kokonaisluvulle k ja osoitetaan, että se pätee luvulle $k+1$. Saadaan

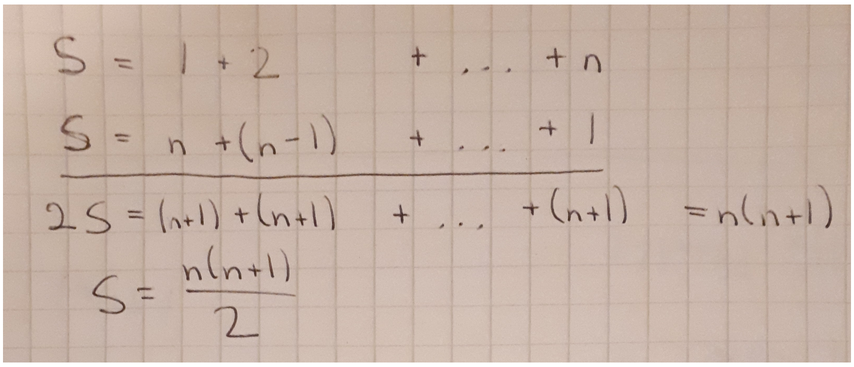
$$S(k+1) = S(k) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k^2+3k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Siis väite pitää paikkansa luvulle $k+1$, jos se on totta luvulla k. Induktioperiaatteen mukaan väite pätee kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n. □

Esimerkki 2.7. Hannan tarkoittama selittävä todistus. Osoita, että kun n ensimmäistä positiivista kokonaislukua lasketaan yhteen, summa on $S(n) = n(n+1)/2$.

Todistus. Todistus on esitetty kuvassa 2.1, jossa kahdella ensimmäisellä rivillä on merkitty positiivisten kokonaislukujen summa positiiviseen kokonaislukuun n asti kahdessa eri järjestyksessä. Kolmannelle riville on laskettu yhteen kahden ylimmän rivin yhtälöt, joka on lopulta sievennetty muotoon $2S = n(n+1)$. Kolmannella rivillä saatu yhtälö on viimeisessä vaiheessa jaettu puolittain kahdella.

□



Kuva 2.1: Esimerkki Hannan tarkoittamasta selittävästä todistuksesta

Luku 3

Todistamisen kehittyminen ja todistamaan oppiminen

Tässä luvussa katsotaan ensin kappaleessa 3.1, miten todistaminen nähdään suomalaisessa lukiossa opetussuunnitelman kautta. Kappaleessa 3.2 on kuvattu hankaluuksia, joita opiskelijat kokevat niin todistuksia lukiessaan kuin niitä tehdessä. Tämän jälkeen kappaleessa 3.3 on kuvailtu, miten todistamiseen vaadittavien ajattelun taitojen tulee kehittyä ja mitä askeleita on opiskelijan otettava omien todistustaitojen kehittyessä. Lopuksi kappaleessa 3.4 on hieman pohdittu, minkälainen todistus sopii opetukseen ja on esitelty yksi konkreettinen malli, jolla todistamista voidaan harjoitella.

3.1 Todistaminen suomalaisessa lukiossa

Lukiossa pitkän matematiikan opetuksen tavoitteissa mainitaan lukion opetussuunnitelman perusteissa [25, s. 131] muun muassa, että opiskelija:

- ymmärtää ja osaa käyttää matematiikan kieltä, kuten seuraamaan matemaattisen tiedon esittämistä, lukemaan matemaattista tekstiä, keskustelemaan matematiikasta, ja oppii arvostamaan esityksen täsmällisyyttä ja perustelujen selkeyttä
- oppii näkemään matemaattisen tiedon loogisena rakenteena
- harjaantuu käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla, tottuu tekemään otaksumia, tutkimaan niiden oikeellisuutta ja laatimaan perusteluja sekä arvioimaan perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä.

Todistaminen esiintyy nykyisessä opetussuunnitelmassa [25, s. 135] suoraan ainoastaan pitkän matematiikan syventävällä kurssilla 11. Vanhassa lukion opetussuunnitelmassa vuodelta 2003 [22, s. 123-124] kurssin *Lukuteoria ja logiikka* keskeisissä sisällöissä on mainittu suora, käänteinen ja ristiriitatodistus. Uudessa opetussuunnitelmassa todistamiselle on annettu hieman lisää painoarvoa ja kurssin nimi on nykyään *Lukuteoria ja todistaminen*. Kurssin keskeisiin sisältöihin on todistustekniikoihin lisätty geometrinen todistus ja induktiotodistus aikaisempien lisäksi.

Todistamista ei muiden kurssien osalta suoraan mainita opetussuunnitelmassa. Silti ainakin yleisimmissä oppikirjoissa tiettyjä lauseita ja tuloksia todistetaan ja on todistamiseen liittyviä tehtäviä myös muiden kurssien osalta. Näitä tehtäviä on kuitenkin melko vähän ja omakohtaisen sekä työyhteisön kokemuksen mukaan lukio-opetuksessa kurssit ovat melko täyteen ahdettuja ja todistusten käsitteleminen ei aikataulun puitteissa ole aina mahdollista siinä määrin kuin haluaisi. Vuonna 2011 tehdyn oppikirja-analyysin [36] mukaan lukion pitkän matematiikan kirjoissa todistamistehtäviä on muilla kuin kurssilla 11 noin $2-15\%$ kurssin tehtävistä. Opettajalla on siis iso vaikutus, kuinka paljon todistamista tai matemaattista ajattelua kursseilla painotetaan. Harel ja Sowder [9] korostavat artikkelissaan opetussuunnitelman merkityksen lisäksi myös opettajan oman opetussuunnitelman merkitystä.

Yliopistossa todistaminen on keskeisessä osassa heti ensimmäisistä kursseista lähtien. Helsingin yliopistolla todistustekniikat ovat perusopintojen kurssin Johdatus yliopistomatematiikkaan oppimateriaalissa [11, 21]. Erään tehtäväanalyysin [14] mukaan perusopintoihin kuuluvalla *Analyysi I* -kurssilla todistustehtäviä on yli puolet kurssin harjoitustehtävistä.

Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssi on vuosien varrella muuttunut ja sillä on myös ollut eri nimiä. Ainakin vuoden 2014 kurssilla [21] on painotettu todistamisen oppimista ja kurssin alussa todistamismenetelmät esitellään seikkaperäisesti sekä paneudutaan todistamisen tekniikoiden lisäksi todistusten rakenteeseen.

3.2 Todistusten lukemisen ja tekemisen vaikeudet

Matematiikkaa on mahdollista ymmärtää ja ajatella monin eri tavoin. Esimerkiksi Thurston [34] luettelee artikkelissaan seitsemän eri tapaa, jolla derivaatan voi selittää tai kirjoittaa: infinitesimaalin käsite, symbolien avulla, kirjoittamalla määritelmän, geometrisesti, muutosnopeuden kautta sekä kuvasta approksimaation tai kuvainnollisesti kuvaajaa mikroskoopilla tarkentamalla.

Matematiikan kielen voidaan ajatella olevan universaali ja monet merkinnät ovat yleisesti tiedossa. Kuitenkin formaalin tekstin lukeminen oman matematiikan osaamisalueen ulkopuolelta tuottaa helposti hankaluuksia, jos lukijalta puuttuu osaamisen substanssi juuri kyseiseen matematiikan osa-alueeseen. Todistuksessa ei välttämättä myöskään ole käytössä juuri se tapa, jolla lukija ymmärtää parhaiten todistukseen liittyvät käsitteet.

Thurston [34] ihmetteleekin, miten todistus muuttuu paljon vaikeammaksi ymmärtää, kun se kirjoitetaan paperille formaalisti sen sijaan, että sama asia yritettäisiin välittää toiselle tiedoksi epäformaalein keinoinen. Epäformaalissa keskustelussa todennäköisesti käytettäisiin eleitä ja piirrettäisiin kuvia ja kuvioita selittämään todistusta. Samoin osaavat keskustelijat löytävät ne määritelmät ja ajatusmallit, jotka molemmat kokevat osaavansa ja ymmärtävänsä. Luennoilla esiintyjän mahdollisuudet asioiden selittämisessä riippuvat paljon yleisön koosta. Mitä suurempi yleisö, sitä vaikeampi löytää kaikille sopivaa esitystapaa. Thurston asettaakin artikkelissaan luennoitsijan formaaliudessaan todistuksen ja epäformaalin keskustelun väliin – luennoitsijan formaalius on jotain paperille kirjoitetun ja epäformaalin keskustelun väliltä.

Seldenin ja Seldenin [30] mukaan opiskelijat usein tarkistivat todistuksen oikeellisuuden rivi riviltä -menetelmällä sen sijaan, että olisivat ensisijaisesti katsoneet isompaa kokonaisuutta. Niinpä suurin osa opiskelijoiden havaitsemista virheistä todistuksessa liittyi virheellisiin yksityiskohtiin, esimerkiksi parittoman luvun esittäminen muodossa, josta parittomuutta ei voi päätellä $(3n + 1)$. Tästä huolimatta opiskelijoilla oli Seldenien tutkimuksessa vaikeuksia erottaa pätevä todistus väärästä. Tutkimuksessa opiskelijoita tavattiin useamman kerran eikä ensimmäisellä tapaamiskerralla opiskelijat saaneet parempia tuloksia kuin arvaamalla olisi saanut. Opiskelijoilla ei siis ollut syvempää tai laajempaa ymmärrystä todistamisesta, vaan joutuivat tyytymään pintapuolisiin tekniikoihin todistusten lukemisessa ja arvioinnissa.

Toisaalta Seldenien [30] tutkimuksessa opiskelijoiden taidot tunnistaa todistuksen oikeellisuus parantui huomattavasti tutkimuksen aikana. Osittain syynä oli, että haastattelija ohjasi tutkittavan ajattelua todistamisen kannalta olennaisiin asioihin. Tutkimuksen yhtenä johtopäätöksenä nähdäänkin, että todistusten arvioinnista ja näkymättömien ajatteluprosessien harjoittelusta on hyötyä.

Aloitteleville opiskelijoille jo todistamisten lukeminen tuottaa siis hankaluuksia. Tall [33] kertoo artikkelissaan tutkimusasetelmasta, jossa opiskelijoiden piti valita paras todistus väitteelle "$\sqrt{2}$ on irrationaaliluku". Opiskelijoiden valitsema paras todistus ei ollut formaali ja yleinen ristiriitatodistus, vaan johdonmukaisesti etenevä selitys esimerkkien avulla, mikä matemaattisesti ajateltuna ei ollut todistus. Matemaatikoilla on myös tapana ilmaista itseään mahdollisimman pelkistetysti, mikä ei välttämättä helpota opiskelijoiden kykyä lukea todistuksia.

Usein todistaminen ja todistamisten lukeminen liittyy läheisesti myös kurssilla samanaikaisesti opeteltavaan asiasisältöön. Knappin [15] mukaan todistaminen on monimutkainen asia, koska opiskelijat tarvitsevat sekä sisältötietoa todistettavan asian matematiikan osa-alueesta että osaamista todistustekniikoista. Ymmärrettävän ja vakavasti otettavan todistuksen tekemiseksi täytyy myös tietää, mitä todistukselta vaaditaan.

Aikaisemmin tässä työssä todettiin, että todistamisen vaatimukset voivat vaihdella ympäristöstä ja kurssista riippuen. Tällöin opiskelijoilla saattaa mennä luonnollisesti energiaa ja vaivaa itse kurssin asiasisällön hallintaan ja ymmärtämiseen. Erityisen haastavaa tämä voi olla yliopisto-opintojen alkuvaiheessa, kun useimmille opiskelijoille myös todistaminen itsessään on verrattain uutta. Helsingin yliopistolla kisällioppimisen menetelmällä [37] järjestetyt kurssit on organisoitu siten, että opiskelijoilla on parempi mahdollisuus saada henkilökohtaista apua kurssimateriaalien lukemiseen ja sitä kautta myös todistusten ymmärtämiseen. Tukea saa myös todistusten kirjoittamiseen ja työstä saa palautetta.

Jos opiskelijoilla on hankaluuksia jo todistusten lukemisessa, niin myös todistusten aloittaminen ja kirjoittaminen tuottaa vaivaa. Moore [19] on omassa artikkelissaan listannut seitsemän vaikeutta, jotka opiskelijat jatkuvasti kohtasivat todistamisessa.

- Opiskelijat eivät osanneet määritelmiä.
- Opiskelijoiden (intuitiivinen) ymmärrys käsitteistä oli puutteellinen.
- Opiskelijoiden käsitteiden hahmottaminen oli riittämätön todistusten tekemiselle.
- Opiskelijat eivät osanneet tai halunneet luoda omia esimerkkejä.
- Opiskelijat eivät osanneet käyttää määritelmiä siten, että olisivat luoneet todistukselle todistusmaisen rakenteen.
- Opiskelijat eivät kyenneet ymmärtämään ja käyttämään matemaattista kieltä ja merkintöjä.
- Opiskelijat eivät tienneet, kuinka aloittaa todistus.

3.3 Todistamisajattelun kehittyminen

Ymmärrys todistamisesta luonnollisesti kehittyy matematiikan opiskelun ja siitä saatavien kokemusten myötä. Matemaattista ajattelua voidaan kehittää myös harjoittelemalla yleisiä ajattelun taitoja. Thurstonin [34] mukaan seuraavat kuusi osa-aluetta ovat oleellisia matemaattiselle ajattelulle:

- puhuttu kieli (niin ajattelussa kuin kommunikaatiossa),

- visualisaatio (esimerkiksi kyky hahmottaa moniulotteisia kappaleita piirrettynä tasoon),
- logiikka ja päättely,
- intuitio, assosiaatiot, metaforat,
- ärsyke ja sen aikaan saama reaktio (esimerkiksi isojen lukujen kertolasku, joka johtaa allekkain laskun tekemiseen),
- prosessi ja aika.

Thurston [34] ei ota mitenkään kantaa siihen, onko jokin mainituista osa-alueista toista suuremmassa roolissa ajattelun kehittymisessä. Yleiset ajattelun taidot ja matemaattinen ajattelu linkittyvät Thurstonin jaottelun mukaan vahvasti toisiinsa ja siirtovaikutusta on molempiin suuntiin. Yksi tapa jaotella todistamisajattelua on Sundströmin [31] artikkelissaan esittämä malli jaotella ajattelu kolmeen eri tasoon:

- Heuristinen idea, joka antaa ymmärryksen todistettavasta asiasta.
- Proseduraalinen idea, joka antaa vahvistuksen todistettavasta asiasta.
- Avainajatus (*key idea*) on heuristinen idea, jonka pystyy muotoilemaan formaaliksi todistukseksi.

Näistä heuristinen ajatus on Sundströmin [31] mukaan ikään kuin henkilökohtainen ajatus, kun taas proseduraalinen on enemmän julkinen. Heuristinen ajatus voi hyvin olla kovinkin epäformaali. Sundströmin mukaan matematiikoille todistaminen on ensisijaisesti näiden kahden puolen yhdistämistä eli avainajatusten löytämistä. Ne yhdistävät todistuksen ymmärtämisen ja todistusten formaalin puolen. Opiskelijoiden osalta hänen mukaansa puuttui taito ja ymmärrys avainajatusten tuottamiseen. Opiskelijoilla oli osaajiin verrattuna puutteita joko epäformaalin ajatuksen kirjaaminen formaalissa muodossa tai formaalin määritelmän ymmärtäminen intuitiivisesti.

Vastaavanlaisen havainnon ovat tehneet Pinto & Tall [26]. He ovat tutkineet todistusajattelun kehittymistä ja opiskelijoita, jotka siirtyvät koulumatematiikasta todistusajatteluun. Ne opiskelijat, jotka onnistuivat parhaiten, pystyivät ymmärtämään määritelmien merkityksen sen sijaan, että olisivat opiskelleet määritelmiä pelkästään ulkoa. Merkitys saatettiin ymmärtää joko määritelmästä alkavalla formaalilla päättelyllä tai osa opiskelijoista pystyi jäsentämään käsitteen kuvaksi.

Artikkelissaan Kögce ja Yildiz [16] ovat tutkineet opettajaopiskelijoiden todistusajatuksen kehittymistä ja havaitsivat pidempään opiskelleiden ajattelevan matemaattista todistamista laajemmasta näkökulmasta kuin vähemmän opiskelleet. Saman tutkimuksen mukaan myös todistamisen merkityksen tärkeys oli pidempään opiskelleiden mielestä isompi – osa aloittelevista opiskelijoista ei pitänyt matemaattista todistusta ollenkaan merkittävänä asiana.

Matemaattisen ajattelun asiantuntijatason yhtenä määritelmänä voidaan pitää kykyä ymmärtää määritelmiä epäformaalissa muodossa ja toisaalta kykynä muuntaa epäformaalit ajatukset formaaliin muotoon. Samalla todistaminen nähdään kokonaisvaltaisempana osana matematiikkaa. Opettajien esittämät todistukset ovat usein suoraviivaisia ja ne esitellään opiskelijoille sellaisenaan. Selden & Selden [30] huomauttaa myös, että todistusten taustalla oleva ajattelu tai kokeilut ja erehdykset eivät eksy paperille. Tämä saattaa alkuun antaa opiskelijoille väärän kuvan siitä, kuinka todistamisen tulisi olla helppoa, siistiä ja vaivatonta. Tallin artikkelissa [33] tätä kuvataan siten, että opiskelijoille näytetään matemaattisen ajattelun lopputulos, mutta ei itse matemaattisen ajattelun prosessia.

Tämä on tietenkin luonnollista, että esimerkiksi yliopistokurssin luennolla todistukset esitetään suoraviivaisesti ajan säästämiseksi. Opettajat voivat kokea, että erehtymiseen ja harhailuun ei kannata käyttää hirveästi aikaa. Toisaalta opiskelijan näkökulmasta voi helposti tulla ajatus, että todistaminen pitäisi saada nopeammin käyntiin tai tehtyä suoraviivaisemmin.

Weber [38] on kuvannut artikkelissaan ajattelun kehittymistä viiden askeleen avulla. Ajattelu syvenee jatkuvasti eikä hänen mukaansa ole mahdollista hypätä yhdenkään ajattelun tason yli. Askeleiden perässä olevat esimerkit ovat Euklidisen geometrian maailmasta.

- *Visualisaatio.* Geometrisen kappaleen tunnistaminen, mutta ei tunnista kappaleen ominaisuuksia.
- *Analyysi.* Kappaleen ominaisuuksien ja osien tunnistaminen, mutta vaikeuksia tunnistaa kappale ominaisuuksien perusteella.
- *Epäformaali päättely.* Osaa yhdistää kappaleita ja ominaisuuksia toisiinsa, mutta ei osaa vielä tehdä edes yksinkertaisia todistuksia.
- *Päättely.* Osaa käyttää aksiomaattista järjestelmää todistusten tekemisessä ja pystyy johdonmukaisesti tekemään päätelmiä geometrisista objekteista.
- *Täsmällisyys.* Osaa vertailla eri aksiomaattisia järjestelmiä.

Edellä mainituista Weberin askeleista oman kokemuksen mukaan lukiotasolla liikutaan noin päättelyn tasolla ja parhaiden opiskelijoiden pitäisi siihen kyetä. Yleisesti matemaattinen ongelmanratkaisu ymmärretään esiaskeleena todistamiselle ja on hyvä huomata kyseisestä listasta ensimmäisten askeleiden rooli ja kuvaus. Lienee turha yrittää liian aikaisin hypätä kohti päättelyä ja täsmällisyyttä, mikäli opiskelijoilla on hankaluuksia analyysin ja epäformaalinkin päättelyn kanssa. Voi olla hyvinkin luonnollista, että varsinaiseen todistamiseen paneudutaan enemmän vasta yliopistossa. Lukiossa niiden asioiden osalta, jotka ovat tuttuja jo peruskoulusta voi olla mahdollista päästä enemmän harjoittelemaan formaalimpaa tai epäformaalia päättelyä. Kuitenkin myös lukion oppisisällöissä on paljon täysin uusia käsitteitä, joiden kanssa pitää ensin päästä visualisaation ja analyysin tasoille.

3.4 Todistamisen opetuksesta

Oman kokemuksen perusteella lukion kirjojen todistamistehtävistä suurin osa perustuu sillä hetkellä opiskeltavana olevaan asiaan. Luonnollisesti myös kirjan esittämät todistukset ovat opiskeltavien lauseiden ja teorioiden takana. Siinä vaiheessa, kun todistaminen ei ole vielä kovin tuttua, niin uuden asiasisällön kohdalla todistusten läpikäyminen voi omalta osaltaan tuottaa opiskelijoille kaksin kerroin opiskeltavaa. Matematiikan opetuksessa järkevä todistuksen rooli riippuukin paljon kohdeyleisöstä. Hannan [8] mukaan opettamisessa painopiste tulisi olla selittävissä todistuksissa.

Back et al. [3, 1] ovat tehneet opetuskokeilun rakenteisten johtojen käyttämisestä lukion pitkässä matematiikassa. Rakenteisten päättelyketjujen tavoitteena on todistuksien helpompi lukeminen. Menetelmä perustuu yksinkertaisen logiikan käyttöön sekä kiinteään esitysmuotoon, jossa ratkaisu esitetään. Rakenteisten päättelyketjujen tavoitteena on ollut löytää käytännöllinen tekniikka, jossa todistukset eivät vaadi aksiomatisointia, mutta todistukset ovat riittävän tarkkoja. Rakenteisten päättelyketjujen syntaksia ja rakenteen käyttämistä tehtävän ratkaisussa on esitetty esimerkissä 3.1.

Esimerkki 3.1. Ratkaistaan yhtälö $(x-1)(x^2+1)=0$.

• Ratkaise yhtälö $(x-1)(x^2+1)=0$
$\Vdash (x-1)(x^2+1)=0$
$\equiv$ {tulon nollasääntö: $ab=0 \equiv a=0$ tai $b=0$}
$x-1=0 \vee x^2+1=0$
$\equiv$ {lisätään puolittain luku -1 oikean puoleiseen yhtälöön}
$x=1 \vee x^2=-1$
$\equiv$ {neliö ei ole koskaan negatiivinen}

$x = 1 \vee F$
$\equiv$ {epätosi disjunktiossa}
$x = 1$

Backin [2] mukaan tällä menetelmällä tehtäviä pystytään jäsentämään helposti sekä ulkoasua selkeyttää. Lisäksi menetelmä pakottaa oppilaat perustelemaan omia ratkaisujaan. Back argumentoi, että tämän menetelmän avulla sekä ainoastaan vähin lisämerkinnöin todistaminen voidaan tuoda takaisin koulumatematiikkaan.

De Villiersin [5] mukaan matematiikan opetuksen tulisi kuvastaa matematiikan luonnetta. Kun todistaminen on matemaattinen tapa todistaa tietoa oikeaksi, on turha liikaa piilotella alemmilla kouluasteilla todistamista. Samalla lailla, kun luonnontieteiden opiskeluun kuuluu olennaisella tavalla tutkimuksen tekeminen ja tutkiminen, tulee matematiikan opetuksessa muistaa todistamisen merkitys ja käyttää sopivaa todistamisen muotoa konteksti huomioiden. On siis luonnollista, että todistamisen merkitys on yliopistotasolla suurempi kuin lukiossa, mutta kuilua olisi varmasti mahdollista pienentää lisäämällä ongelmanratkaisua ja todistamista peruskouluun ja lukioon sopivassa viitekehyksessä.

Rakenteisten johtojen lisäksi myös selittävä todistusmalli, kaverin tai vihollisen vakuuttaminen sekä matemaattisen todistamisen näkeminen leveämmin eri merkitysten avulla voivat antaa opettajalle lisää työkaluja ja ideoita todistamisen harjoitteluun ennen yliopistotasoa. Oli myös mainittu, että erilaisten metaforien ja assosiaatioiden sekä yleinen logiikka ja päättely auttavat myös matemaattisen todistamistaidon kehittymisessä. Näin ollen myös esimerkiksi äidinkielen taidot linkittyvät matemaattiseen osaamiseen.

Luku 4

Tutkimus

Tutkin opiskelijoiden vastauksia todistamistehtäviin syksyn 2014 kurssin Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I sekä kurssin toisen osan Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II harjoituksissa. Kappaleessa 4.1 kerron tarkemmin kursseista, niiden suorittamistavasta ja oppimistavoitteista. Seuraavassa kappaleessa 4.2 ovat tutkimuskysymykset ja kappaleessa 4.3 on kerrottu tutkimusmenetelmästä sekä otannasta. Kappaleessa 4.4 ovat tehtävänannot, joiden tehtävävastaukset arvioin, ja seuraavassa kappaleessa 4.5 on todistusten arviointikriteerit sekä esimerkkejä siitä, miten vastauksia arvioitiin. Viimeisessä kappaleessa 4.6 on kerrottu, miten yksittäisen opiskelijan todistamisen kehittymistä on arvioitu.

4.1 Kurssit Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I ja II

Molemmat kurssit ovat viiden opintopisteen matematiikan aineopintoihin kuuluvia kursseja. Kurssit suoritetaan pääsääntöisesti matematiikan opintojen alussa ja ne tarjotaan peräkkäisissä periodeissa I ja II. Kursseilla on myös paljon sivuaineopiskelijoita, joista suurimmalla osalla on pääaineena tietojenkäsittelytiede. Syksyllä 2014 kurssin ensimmäiseen osaan osallistui 459 opiskelijaa ja toiseen osaan 344 opiskelijaa. Näistä opiskelijoista sivuaineopiskelijoita oli ensimmäisessä osassa 59 % (271 opiskelijaa) ja toisessa 47 % (163 opiskelijaa).

Kurssien opetus koostui harjoitustehtävistä, ohjauksesta sekä luennoista. Kurssin kotisivujen [12] mukaan pääosa opiskelusta on laskuharjoitustehtävien tekemistä ja kurssimateriaalin lukemista. Kurssilla käytettiin tehostetun kisällioppimisen menetelmää [37], johon olennaisena osana kuuluu ohjaus, jossa laskuharjoituksiin sekä kurssimateriaalin lukemiseen saa tarvittaessa henkilökohtaista ohjausta ohjaajilta. Kurssilla annettiin viikoittain laskuharjoituksia, jotka opiskelijat palauttivat kirjallisesti. Yhden viikon laskuharjoitustehtäväpaperissa on noin 15 tehtävänantoa. Palautetuista tehtävistä sai lisäpisteitä, joilla oli mahdollista korvata koepisteitä.

Kurssikuvauksessa [12] huomautetaan, että kurssi Johdatus yliopistomatematiikkaan on suositeltavaa käydä vähintään samaan aikaan kuin kurssin ensimmäinen osa. Kyseisen kurssin asioista tällä kurssilla tarvitaan joukko-opin perusteet sekä erilaiset todistustekniikat (vastaesimerkki, epäsuora päättely, tyyppiä *jos...niin* ja *jos ja vain jos* olevien väitteiden todistukset).

Kurssin [12] oppimistavoitteissa todistamisen ja ratkaisujen tuottamisen osalta todetaan taulukon 4.1 mukaisesti.

	Oppimistavoitetta lähestyvät taidot	**Oppimistavoitteen saavuttavat taidot**
Todistaminen	Tietää eron esimerkin, määritelmän ja lauseen välillä	Lukee todistuksia ja pystyy seuraamaan niiden yksinkertaista rakennetta. Ratkaisee yksinkertaisia Osoita, että... -tyyppisiä tehtäviä.
Ratkaisujen tuottaminen	Kirjoittaa ratkaisuja, joiden kieli ja looginen rakenne ovat niin selkeitä, että ulkopuolinen saa niistä selvän. Käyttää kurssin merkintöjä vastauksissaan.	Määrittelee käyttämänsä symbolit kuten muuttujat ja vakiot. Kirjoittaa kokonaisia ja ymmärrettäviä lauseita ja käyttää matemaattisia symboleita vain tarvittaessa.

Taulukko 4.1: Osa kurssien lineaarialgbera ja matriisilaskenta I ja II oppimistavoitteista

Viikoittain annetut laskuharjoitustehtävät oli jaettu tehtäväsarjoihin aihepiirin mukaan. Yhteensä neljän eri viikon laskuharjoitustehtävissä oli viimeisenä kolmen harjoitustehtävän tehtäväsarja, joiden vastaukset kerättiin tutkimusta varten. Näiden tehtäväsarjojen kolmesta tehtävästä yksi oli tehtävänannoltaan muotoa “Osoita, että...”. Tämän tehtävänannon mukaisia tehtäviä tutkitaan tässä tutkielmassa. Kaikista kurssilla tehdyistä tehtävistä pystyi keräämään pisteitä, mutta opiskelijoita motivoitiin palauttamaan näitä tutkimukseen tulevan tehtäväsarjan tehtäviä tuplapisteytyksellä. Opiskelijat palauttivat tehtävät käyttäen henkilökohtaista kurssikoodia, joilla palautetuista laskuharjoitustehtävistä saadut pisteet kohdennettiin oikealle opiskelijalle. Opiskelijoille annetussa tehtävänannossa luki seuraavasti:

Kirjoita tämän tehtäväsarjan ratkaisut eri paperille kuin muut ratkaisut. Nido paperi kuitenkin yhteen muiden ratkaisujen kanssa. Opiskelijoiden ratkaisut näihin tehtäviin kerätään talteen ja niitä käytetään kurssia koskevassa tutkimuksessa. Tehtäväsarjan tehtävistä saa tuplapisteet: kukin tehtävä vastaa kahta tavallista tehtävää.

4.2 Tutkimuskysymykset

Tutkimuksella ovat seuraavat tutkimuskysymykset:

1. Minkälaiset virheet ovat yleisimpiä todistamisessa 1. vuoden opiskelijoille suunnatun kurssin aikana?

2. Miten opiskelijan todistaminen kehittyy 1. vuoden opiskelijoille suunnattujen kurssien aikana?

4.3 Tutkimusmenetelmä ja otos

Yhteensä 87 opiskelijaa palautti vastaukset kaikilla neljällä laskuharjoituskerralla, jolloin vastauksia kerättiin. Näistä 87 opiskelijasta valitsin systemaattisella otannalla 15 opiskelijan vastaukset, joita tutkin. Opiskelijoista oli mahdollista ensimmäisen kurssin ilmoittautumisjärjestyksen perusteella muodostaa henkilöiden sisäinen järjestys kurssikoodin avulla. Tällöin Metsämuurosen [18, s. 48] mukaan systemaattinen otanta soveltuu menetelmäksi otosta valittaessa.

Metsämuuronen [18, s. 48] kuvaa, että systemaattisessa otannassa otosjoukko asetetaan järjestettyyn jonoon, jonka jälkeen arvotaan mistä kohdasta otos aloitetaan. Sen jälkeen otosjoukosta valitaan tasaisen poimintavälin mukaisesti otos. Tässä tapauksessa viidentoista vastauksen saamiseksi poimintaväli on kuusi ja otoksen aloittaja arvottiin nopalla ensimmäisten joukosta.

Tutkimuksessa on käytetty teoriaohjaavaa sisällönanalyysiä, joka Tuomen ja Sarajärven [35, s. 133] mukaan on pitkälti sama kuin aineistolähtöinen sisältöanalyysi. Aineistolähtöinen sisällönanalyysi on menetelmä, joka Driskon ja Maschin mukaan [6, s. 25,27] on hyvin edustettu opetukseen ja kasvatukseen liittyvissä tutkimuksissa ja sopii sisällön merkitysten tarkasteluun. Erona teorialähtöiseen sisällönanalyysiin Tuomen ja Sarajärven [35, s. 133] mukaan on, että teoriaohjaavassa aineistoa lähestytään aineiston ehdoilla eikä sitä pakoteta tiettyyn ennalta määrättyyn teoriaan sopivaksi.

Aineistolähtöinen sisällönanalyysi etenee Tuomen ja Sarajärven [35, s. 122] periaatteiden mukaisesti karkeasti ottaen kolmessa vaiheessa: 1) aineiston pelkistäminen, 2) aineiston ryhmittely ja 3) teoreettisten käsitteiden luominen. Tutkimuskirjallisuudessa suurin osa aineistolähtöisen analyysin keinoista liittyy haastatteluihin. Tässä työssä tutkittavat todistukset ovat verrattain lyhyitä. Aineistoon liittyvät tehtävät on ensimmäisen kerran käyty läpi aineiston kokonaiskuvan saamiseksi. Sen jälkeen aineistosta esille nousevia asioita on verrattu aineistolle sopivaan teoriakontekstiin ja vastauksia ryhmitelty. Arviointikriteerit ovat kappaleissa 4.5 ja 4.6.

4.4 Tutkittavat tehtävät

Kurssin ensimmäisessä osassa palautettavat tehtävät olivat laskuharjoitusviikoilta 2 ja 5. (Kurssilla oli yhteensä 6 laskuharjoitusviikkoa sekä yhdet kertaustehtävät.) Toisen osan tutkittavat tehtävät ovat laskuharjoitusviikoilta 1 ja 5 (yhteensä 6 harjoitusviikkoa). Ajallisesti ensimmäinen tutkittava todistustehtävä on syyslukukauden alusta ja viimeinen todistustehtävä syyslukukauden lopulta. Lisäksi lineaarialgebran kurssin ensimmäisen osion kanssa samaan aikaan olleella kurssilla Johdatus yliopistomatematiikkaan on käsitelty todistamiseen liittyviä asioita. Monet opiskelijat suorittavat nämä kurssit samanaikaisesti.

Seuraavassa on tutkitut tehtävänannot ja yhdet esimerkkiratkaisut, jonka jälkeisessä kappaleessa 4.5 on kriteerit, joiden perusteella vastaukset on luokiteltu ja arvioitu.

Tehtävä 4.1. Oletetaan, että $\overline{v}, \overline{w} \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ ovat aliavaruuden $\text{span}(\overline{v}, \overline{v}+\overline{w})$ alkioita.

Todistus. Oletetaan, että $\overline{v}, \overline{w} \in \mathbb{R}^n$.

Määritelmän mukaan aliavaruuteen $\text{span}(\overline{v}, \overline{v}+\overline{w})$ kuuluvat kaikki alkiot, jotka ovat muotoa $a_1\overline{v} + a_2(\overline{v}+\overline{w})$, missä $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Koska $\overline{v} = 1 \cdot \overline{v} + 0 \cdot (\overline{v}+\overline{w})$, niin vektori $\overline{v}$ kuuluu aliavaruuteen $\text{span}(\overline{v}, \overline{v}+\overline{w})$. Toisaalta $\overline{w} = -1 \cdot \overline{v} + 1 \cdot (\overline{v}+\overline{w})$, joten $\overline{w} \in \text{span}(\overline{v}, \overline{v}+\overline{w})$

Siis $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ ovat aliavaruuden $\text{span}(\overline{v}, \overline{v}+\overline{w})$ alkioita. □

Tehtävä 4.2. Oletetaan, että A on neliömatriisi, jolle pätee $A^2 = 0$. Osoita, että matriisi $I - A$ on kääntyvä ja että sen käänteismatriisi on $A + I$.

Todistus. Oletetaan, että A on n x n neliömatriisi, $A^2 = 0$ ja merkitään, että I on yksikkömatriisi I_n. Matriisi $I - A$ on kääntyvä ja sen käänteismatriisi on $A + I$, jos $(I - A)(A + I) = I$ ja $(A + I)(I - A) = I$.

Lasketaan matriisien laskusääntöjen ja oletuksen $A^2 = 0$ avulla tulo $(I - A)(A + I)$ ja nähdään, että

$$(I - A)(A + I) = IA - A^2 + I^2 - AI = A - A^2 + I - A = -0 + I = I.$$

Lasketaan myös matriisien $(A + I)(I - A)$ tulo ja nähdään, että

$$(A + I)(I - A) = A(I - A) + I(I - A) = AI - A^2 + I^2 - IA = A - A^2 + I - A = -0 + I = I.$$

Siis $I - A$ on kääntyvä ja sen käänteismatriisi on $A + I$. □

Tehtävä 4.3. Oletetaan, että V on vektoriavaruus, johon kuuluvat vektorit $\overline{v}$ ja $\overline{w}$. Osoita vapauden määritelmän perusteella, että jos jono $(\overline{v}, \overline{w})$ on sidottu, niin jompikumpi vektoreista $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ on toisen skalaarimonikerta.

Todistus. Oletetaan, että jono $(\overline{v}, \overline{w})$ on sidottu. Oletetaan myös, että $c_1\overline{v} + c_2\overline{w} = \overline{0}$ joillakin $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Koska jono $(\overline{v}, \overline{w})$ on sidottu, niin $c_1 \neq 0$ tai $c_2 \neq 0$.

Koska $c_1\overline{v} + c_2\overline{w} = \overline{0}$, niin $c_1\overline{v} = -c_2\overline{w}$.

Jos $c_1 \neq 0$, niin jaetaan saatu yhtälö puolittain c_1, jolloin $\overline{v} = -\frac{c_2}{c_1}\overline{w}$ eli vektori $\overline{v}$ on vektorin $\overline{w}$ skalaarimonikerta.

Jos $c_2 \neq 0$, niin jaetaan saatu yhtälö puolittain c_2, jolloin $\overline{w} = -\frac{c_1}{c_2}\overline{v}$ eli vektori $\overline{w}$ on vektorin $\overline{v}$ skalaarimonikerta.

Siis, jos jono $(\overline{v}, \overline{w})$ on sidottu, niin jompikumpi vektoreista $\overline{v}$ tai $\overline{w}$ on toisen skalaarimonikerta. □

Tehtävä 4.4. Oletetaan, että $L : V \to U$ on injektiivinen lineaarikuvaus. Oletetaan lisäksi, että avaruuden V jono $(\overline{v}_1, ..., \overline{v}_n)$ on vapaa. Osoita, että myös jono $(L(\overline{v}_1), ..., L(\overline{v}_n))$ on vapaa.

Todistus. Oletetaan, että $c_1L(\overline{v}_1) + ... + c_nL(\overline{v}_n) = \overline{0}$ joillakin $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$. Nyt on osoitettava, että tällöin $c_1 = 0, ..., c_n = 0$.

Koska L on lineaarikuvaus, pätee $c_1L(\overline{v}_1) + ... + c_nL(\overline{v}_n) = L(c_1\overline{v}_1 + ... + c_n\overline{v}_n) = \overline{0}$.

Siten $c_1\overline{v}_1 + ... + c_n\overline{v}_n \in \operatorname{Ker} L$. Koska L on injektio, ytimessä on ainoastaan nollavektori, joten $c_1\overline{v}_1 + ... + c_n\overline{v}_n = \overline{0}$. Oletuksen mukaan jono $(\overline{v}_1, ..., \overline{v}_n)$ on vapaa, joten $c_1 = 0, ..., c_n = 0$. Siis jono $(L(\overline{v}_1), ..., L(\overline{v}_n))$ on vapaa. □

4.5 Todistusten oikeellisuuden arviointi

Matemaattisessa mielessä todistuksissa nousi aineistoanalyysissä kahdenlaisia virheitä. Ensinnäkin todistuksissa oli merkintävirheitä, jotka eivät sinällään vaikuttaneet tehtävän oikeellisuuteen, varsinkaan jos tehtävänanto eli konteksti oli tiedossa. Toinen pääkategoria oli virheet todistuksen matemaattisessa päättelyssä.

Aikaisemmin kappaleessa 2.1 todetun Tallin määritelmän mukaisesti todistuksella tulee olla

- selkeästi muotoillut määritelmät ja väitteet sekä
- hyväksytyt toimenpiteet, joilla johdetaan uuden väitteen totuus edellisestä.

Tässä tutkimuksessa todistuksen eteneminen ylläolevien ehtojen mukaisesti arvoitiin taulukon 4.2 avulla. Ensimmäisen todistuksen ehdon toteutumista arvioitiin myös kurssin oppimistavoitteissa mainituilla kriteereillä 1 ja 2. Toista ehtoa eli todistuksen etenemistä matemaattisesti oikein arvioitiin tutkijan asiaosaamisen avulla (kriteeri 3). Sisällönanalyysin vaiheessa tuli esiin, että osa todistuksista loppui ikään kuin kesken, joten kriteerissä 4 vaadittiin vielä, että vastaaja tarvittaessa kokoaa todistuksen vaatimat tiedot yhteen ja siten päättää todistuksen.

Mikäli todistus täytti kaikki taulukon 4.2 kriteerit, pidetään sitä tässä tutkielmassa hyväksyttävänä todistuksena. Kaikki tehtävät arvioitiin kaikilla neljällä osa-alueella, vaikka virhe olisi tapahtunut jo ensimmäisissä kriteereissä. Esimerkki kaikki kohdat läpäisseestä ja hyväksytystä todistuksesta on kuvassa 4.1.

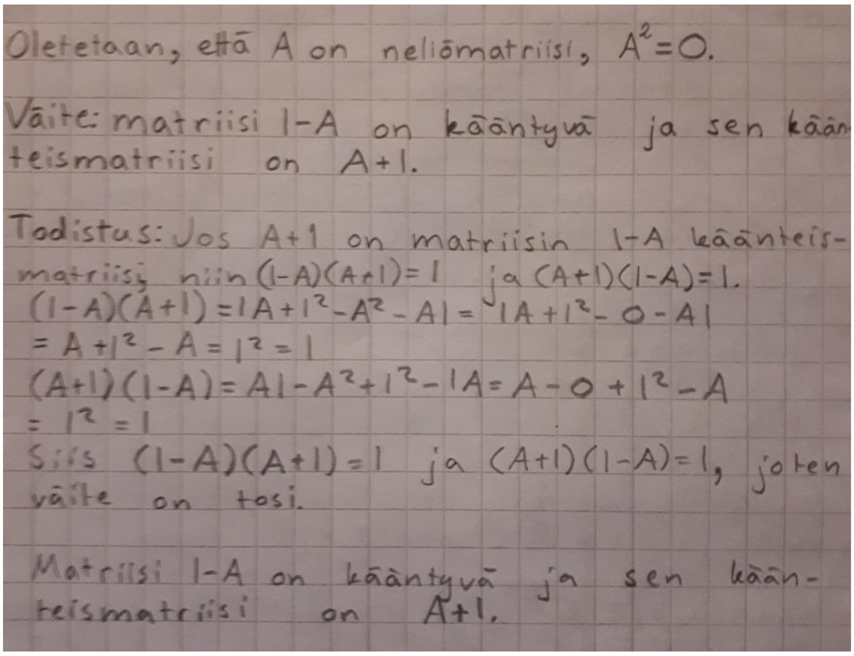
Kriteeri	KYLLÄ	EI
1 Oletukset ja väitteet ovat selvästi eroteltu toisistaan		
2 Vastaaja määrittelee käyttämänsä muuttujat ja merkinnät		
3 Vastaus etenee johdonmukaisesti (ja matemaattisesti oikein) vaiheesta toiseen		
4 Vastaaja vetää johtopäätökset lopussa sanallisesti yhteen		

Taulukko 4.2: Todistuksen oikeellisuuden arvioimisen vaiheet

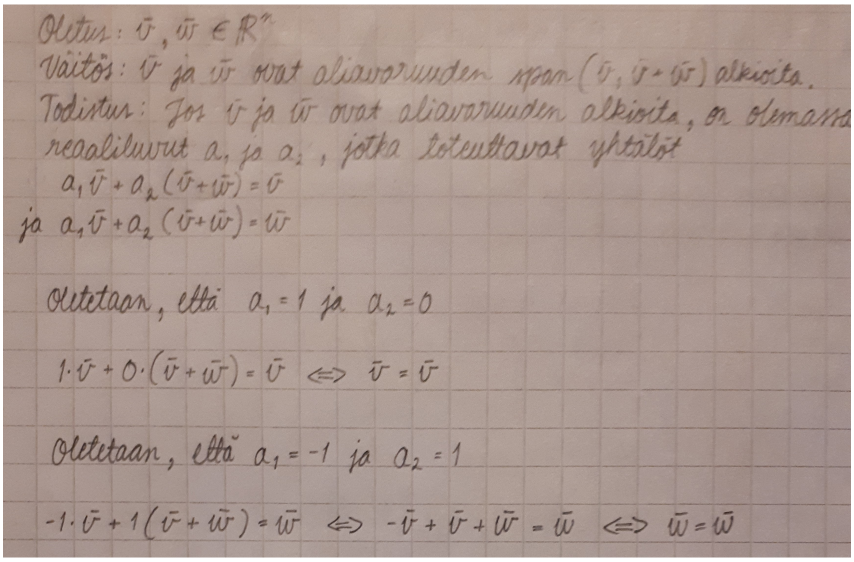
Lisäksi tutkittiin, minkä tyyppisiä virheitä opiskelijat tekivät todistusten matemaattisessa päättelyssä. Mikäli kriteerin 3 kohdalla havaittiin virhe, havaittu virhe lajiteltiin omaan virhekategoriaan, jotka löytyvät taulukosta 4.3. Virhekategoriat valittiin Seldenin ja Seldenin [29] julkaiseman artikkelin pohjalta, jossa tutkijat ovat listanneet tyypillisimmät todistuksessa tehdyt virheet. Virhekategorioista poistettiin kokonaan ne artikkelissa listatut virheet, joita tutkittavissa vastauksissa ei esiintynyt.

Kategoria	virhe?
1 Todistus aloitetaan johtopäätöksellä, jolloin alkuperäinen väite on tosi vain, mikäli päättely voidaan tehdä myös toiseen suuntaan, esimerkki kuvassa 4.4	
2 Määritelmää käytetään väärin, esimerkki kuvassa 4.5	
3 Laskusääntöjä käytetään väärin, esimerkiksi vektoreilla tai matriiseilla käytetään reaaliluvuilla toimivaa laskusääntöä, esimerkki kuvassa 4.6.	
4 Väärinkäytetty lause tai teoria, esimerkiksi lauseen vaatimat ehdot eivät ole voimassa, mutta lausetta käytetään silti, esimerkki kuvassa 4.3.	
5 Todistuksessa ei järkeä, esimerkiksi vastaus näyttää todistukselta, mutta johtopäätökset eivät perustu mihinkään.	
6 Aukko todistuksessa, esimerkiksi todistuksessa jää välistä jokin saatuun johtopäätökseen välttämätön vaihe, esimerkki kuvassa 4.3.	
7 Todistuksen heikentäminen, esimerkiksi todistaminen vain yhdelle esimerkkitapaukselle.	

Taulukko 4.3: Virhekategoriat, jotka todistuksesta löytyvät



Kuva 4.1: Hyväksyttävä todistus.


Oletus: $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$
Väitös: $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat aliavaruuden span$(\bar{v}, \bar{v}+\bar{w})$ alkioita.
Todistus: Jos $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat aliavaruuden alkioita, on olemassa reaaliluvut a_1 ja a_2, jotka toteuttavat yhtälöt
$a_1\bar{v} + a_2(\bar{v}+\bar{w}) = \bar{v}$
ja $a_1\bar{v} + a_2(\bar{v}+\bar{w}) = \bar{w}$

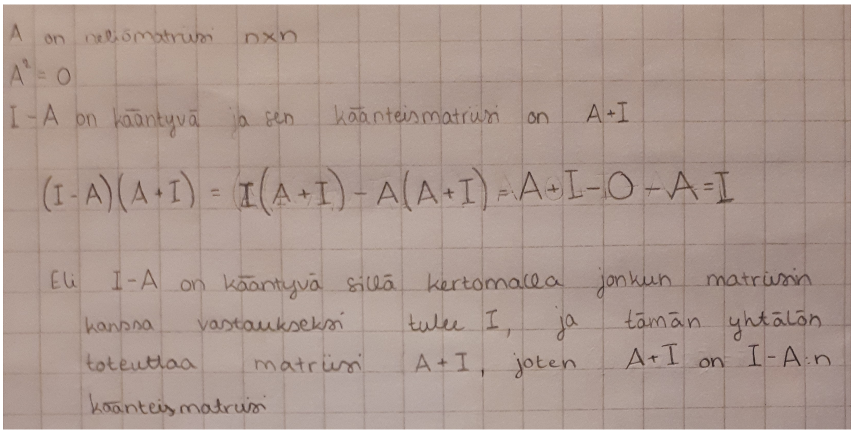
Oletetaan, että $a_1 = 1$ ja $a_2 = 0$

$1\cdot\bar{v} + 0\cdot(\bar{v}+\bar{w}) = \bar{v} \iff \bar{v} = \bar{v}$

Oletetaan, että $a_1 = -1$ ja $a_2 = 1$

$-1\cdot\bar{v} + 1(\bar{v}+\bar{w}) = \bar{w} \iff -\bar{v}+\bar{v}+\bar{w} = \bar{w} \iff \bar{w} = \bar{w}$

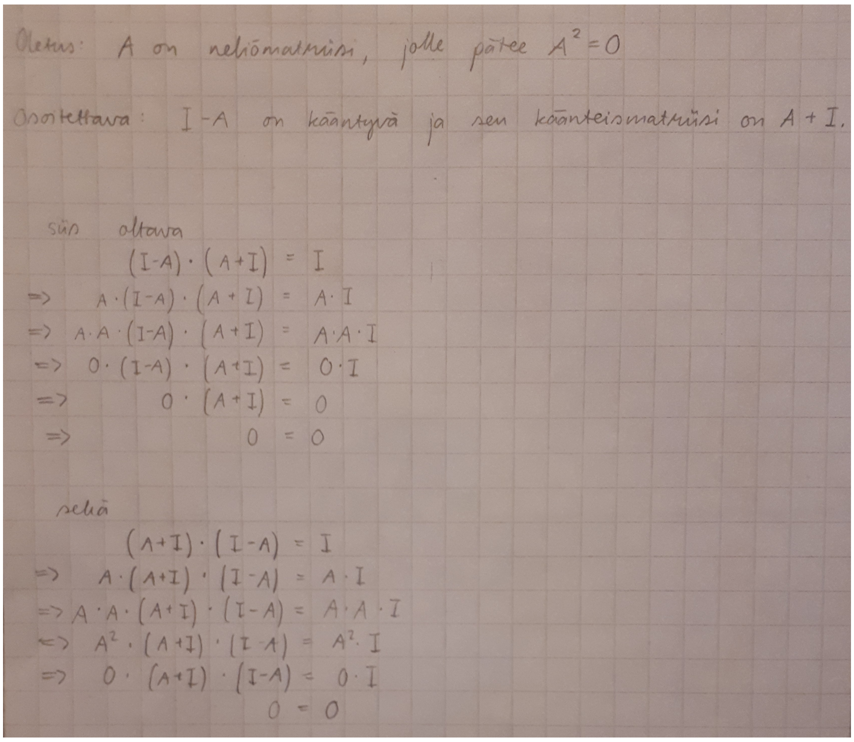
Kuva 4.2: Todistuksesta puuttuu loppuyhteenveto.


A on neliömatriisi $n \times n$
$A^2 = 0$
$I - A$ on kääntyvä ja sen käänteismatriisi on $A+I$

$(I-A)(A+I) = I(A+I) - A(A+I) = A+I-0-A = I$

Eli $I-A$ on kääntyvä sillä kertomalla jonkun matriisin kanssa vastaukseksi tulee I, ja tämän yhtälön toteuttaa matriisi $A+I$, joten $A+I$ on $I-A$:n käänteismatriisi

Kuva 4.3: Todistuksessa oletus ja väitteet eivät ole selvästi erotettavissa. Lisäksi pelkästään lasketusta tulosta ei voi tehdä todistuksessa tehtyä johtopäätöstä, joten todistus on merkitty virhekategoriaan 4, sillä käytetyn lauseen kaikki ehdot eivät täyty.



Oletus: A on neliömatriisi, jolle pätee $A^2 = 0$

Osoitettava: $I - A$ on kääntyvä ja sen käänteismatriisi on $A + I$.

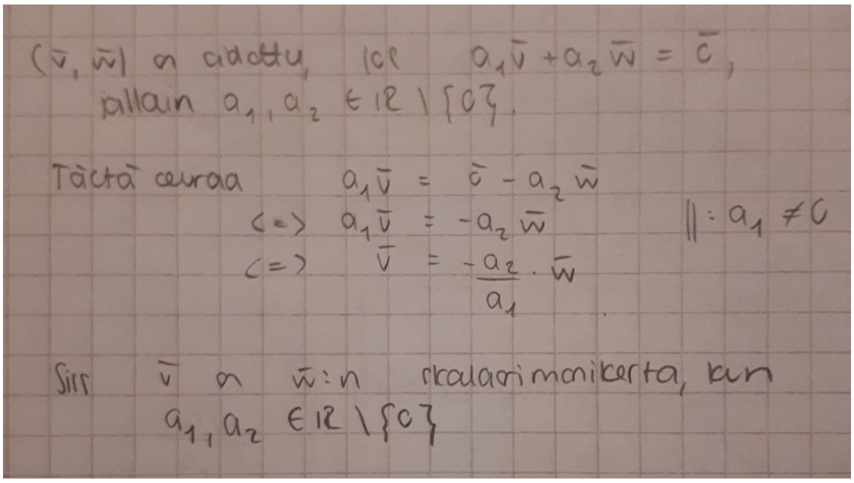
siis oltava

$$
\begin{aligned}
& (I-A)\cdot(A+I) = I \\
\Rightarrow\ & A\cdot(I-A)\cdot(A+I) = A\cdot I \\
\Rightarrow\ & A\cdot A\cdot(I-A)\cdot(A+I) = A\cdot A\cdot I \\
\Rightarrow\ & 0\cdot(I-A)\cdot(A+I) = 0\cdot I \\
\Rightarrow\ & 0\cdot(A+I) = 0 \\
\Rightarrow\ & 0 = 0
\end{aligned}
$$

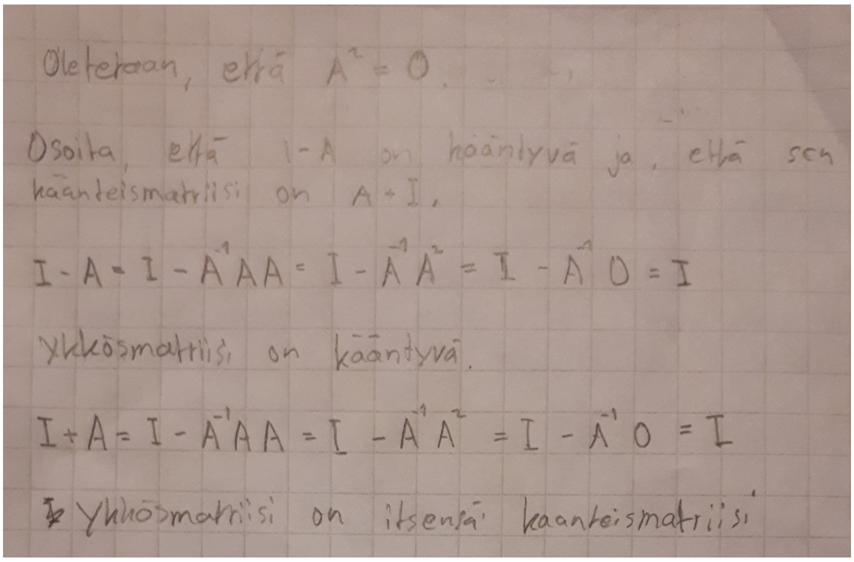
sekä

$$
\begin{aligned}
& (A+I)\cdot(I-A) = I \\
\Rightarrow\ & A\cdot(A+I)\cdot(I-A) = A\cdot I \\
\Rightarrow\ & A\cdot A\cdot(A+I)\cdot(I-A) = A\cdot A\cdot I \\
\Leftrightarrow\ & A^2\cdot(A+I)\cdot(I-A) = A^2\cdot I \\
\Rightarrow\ & 0\cdot(A+I)\cdot(I-A) = 0\cdot I \\
& 0 = 0
\end{aligned}
$$

Kuva 4.4: Todistuksessa oletukset ja väitteet on selvästi eroteltavissa sekä vastaaja on määritellyt käyttämänsä merkinnät. Todistus on kuitenkin aloitettu johtopäätöksellä ja on siten virheellinen ja merkitty virhekategoriaan 1.



Kuva 4.5: Todistus on virheellinen ja on merkitty virhekategoriaan 2 - esimerkki todistuksesta, jossa määritelmää ei ole käytetty oikein (sidotussa jonossa voi toinen luvuista a_1 tai a_2 olla 0), mikä johtaa puutteelliseen todistukseen. Todistuksesta ei myöskään selvästi erota oletuksia ja väitettä toisistaan.



Kuva 4.6: Todistuksessa oletukset ja väitteet on selvästi eroteltavissa. Vastaaja ei ole kuitenkaan määritellyt merkintää A neliömatriisiksi. Todistus on muutenkin virheellinen ja on merkitty virhekategoriaan 3 - matriiseilla on käytetty laskusääntöä, joka ei ole matriiseilla voimassa, sillä matriisilla A ei välttämättä ole käänteismatriisia olemassa.

4.6 Todistamisen kehittymisen arviointi

Yksittäisen vastaajan todistamisen kehittymistä on arvioitu kuvailemalla ja vertaamalla tutkittavan vastaajan vastauksia kaikkiin neljään tehtävään. Aineistoa analysoitaessa kävi ilmi, että tutkitut todistamistehtävät olivat sen verran erityyppisiä, että kehittymistä matemaattisen sisällön osalta ei pysty arvioimaan tämän aineiston pohjalta. Sen sijaan opiskelijoiden todistamisen kehitystä tutkittaessa on keskitytty todistuksen ulkoasuun, kurssin osaamistavoitteiden mukaiseen ratkaisujen kirjoittamiseen sekä todistuksen vaatimuksiin.

Tehtäviä ja kehitystä vertailtaessa on seurattu, että

- oletukset ja väitteet on selkeästi erotettu toisistaan,
- vastaaja määrittelee käyttämänsä merkinnät ja käsitteet ja
- ratkaisuissa käytetään kokonaisia lauseita.

Yksittäisen opiskelijan todistamisen kehittymisen arviointia tutkittiin ottamalla saman vastaajan kaikki neljä tehtävävastausta kerralla analyysiin. Tämän jälkeen on vastauksia verrattu keskenään ylläolevien kolmen kohdan perusteella.

Luku 5

Tulokset

Tässä luvussa käydään läpi tutkimuksen tulokset. Ensin kappaleessa 5.1 on hyväksyttyjen todistuksen määrä sekä virheet, jotka johtivat todistusten hylkäämisiin. Kappaleessa 5.2 on käytettyjen käsitteiden määrittelemiseen sekä oletusten ja väitteiden sekaisin menemiseen liittyvät virheet. Tämän jälkeen kappaleessa 5.3 on matemaattisissa johtopäätöksissä tehdyt virheet jaettu kategorioihin. Viimeisessä kappaleessa 5.4 on kuvattu yksittäisen opiskelijan todistusten esityksen kehittymistä.

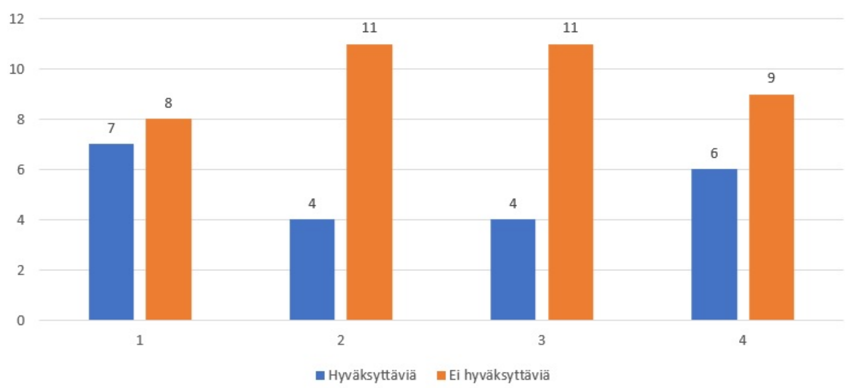
5.1 Hyväksyttävien todistusten määrä

Kaikista tutkituista todistuksista (n=60) hyväksyttyjä todistuksia on 35 % (21 kappaletta). Todistus oli hyväksytty, mikäli se toteutti kaikki seuraavat kriteerit:

- Oletukset ja väitteet ovat selvästi eroteltu toisistaan,
- Vastaaja määrittelee käyttämänsä muuttujat ja merkinnät,
- Vastaus etenee johdonmukaisesti (ja matemaattisesti oikein) vaiheesta toiseen,
- Vastaaja vetää johtopäätökset lopussa sanallisesti yhteen.

Kuvassa 5.1 on esitelty, mihin kriteeriin ei-hyväksytty todistus on kariutunut. Virheellisiä todistuksia on yhteensä 39 kappaletta (n=60). Suurimmassa osassa virheellisistä todistuksista (21/39) virheenä on ollut, että oletuksia ja väitteitä ei ole selkeästi erotettu toisistaan. Toiseksi yleisin virhe (17/39) on, että vastaaja on käyttänyt todistuksessaan merkintöjä tai käsitteitä, joita hän ei ole määritellyt. Molemmat virheet löytyivät yhteensä 7 todistuksesta eli 10 todistusta kariutui kriteeriin 2. Niistä tehtävistä, jotka läpäisivät kriteerit 1 ja 2 (28 kappaletta) kuudessa tehtävässä todistus sisälsi virheellisen johtopäätöksen ja yhdessä tietoja ei koottu yhteen.

Kuva 5.1: Virhekriteerit, joihin todistus on kariutunut (n=60)

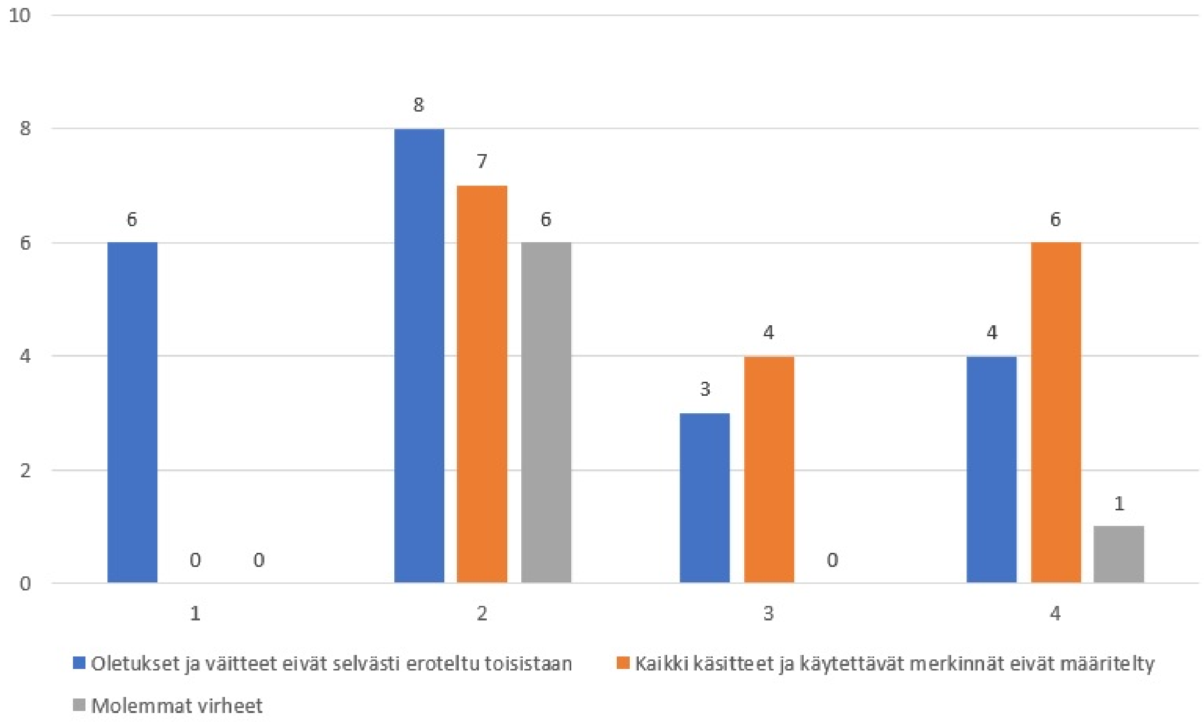


Kuva 5.2: Hyväksyttävien todistusten määrä tehtävittäin.

Kuvassa 5.2 on esitetty hyväksyttävien ja ei-hyväksyttävien todistuksien määrä tehtävittäin. Eniten hyväksyttyjä todistuksia on ollut tehtävälle 1 (7/15), vähiten hyväksyttyjä todistuksia tehtäville 2 ja 3 (4/15). Tehtävälle 4 hyväksyttyjä todistuksia on 6 kappaletta.

5.2 Virheet arviointikriteereissä 1 ja 2 (selkeästi muotoillut määritelmät sekä merkinnät)

Kuvassa 5.3 on tehtävittäin jaoteltuna, kuinka monessa vastauksessa oli virheitä käytettyjen merkintöjen määrittelemisessä tai epäselvästi erotettavissa oletukset ja väitteet. Tutkittuja vastauksia oli 15 jokaista tehtävänantoa kohden.



Kuva 5.3: Virheiden osuus tehtävittäin jaoteltuna.

Tehtävässä 1 kaikki vastaajat olivat määritelleet käytetyt merkinnät, mutta osassa vastauksista (6 kappaletta) lukija ei pysty täysin erottelemaan oletuksia ja väitteitä toisistaan. Tehtävässä 2 lukijan oli suurimmassa osassa vastauksista (8 kappaletta) vaikea erottaa oletukset ja väitteet. Useassa vastauksessa (7) oli myös puutteellisia määrittelyjä ja kuudessa vastauksessa oli tehty nämä molemmat virheet. Tehtävissä 3 ja 4 oli selvemmin oletukset ja väitteet erotettavissa toisistaan (virheitä 3 ja 4 kappaletta), mutta puutteita käytettyjen merkintöjen määrittelemisessä (virheitä 4 ja 6 kappaletta).

5.3 Virheet arviointikriteerissä 3 (matemaattinen epäjohdonmukaisuus)

Matemaattisen epäjohdonmukaisuuden osalta tutkittiin kaikissa vastauksissa (n=60) matemaattisissa päättelyissä havaittuja virheitä. Tässä tehtävien joukossa ovat siis mukana myös ne tehtävät, jotka eivät muutoin olleet enää hyväksyttäviä todistuksia. Yhteensä 33 vastauksessa (n=60) ollut todistuksen matemaattinen päättely oli hyväksyttävä. Taulukossa 5.1 on esitetty virheiden määrä kategorioittain kaikista todistuksista löytyville virheille. Sama todistus saattaa sisältyä useampaan virhekategoriaan. Lisäksi neljässä vastauksessa oli matemaattiset vaiheet tehty oikein, mutta todistus jäi kesken.

Kategoria	virheiden määrä
1 Todistus aloitetaan johtopäätöksellä, jolloin alkuperäinen väite on tosi vain, mikäli päättely voidaan tehdä myös toiseen suuntaan.	2
2 Määritelmää käytetään väärin.	8
3 Laskusääntöjä käytetään väärin, esimerkiksi vektoreilla tai matriiseilla käytetään reaaliluvuilla toimivaa laskusääntöä.	4
4 Väärinkäytetty lause tai teoria, esimerkiksi lauseen vaatimat ehdot eivät ole voimassa, mutta lausetta käytetään silti.	3
5 Todistuksessa ei järkeä, esimerkiksi vastaus näyttää todistukselta, mutta johtopäätökset eivät perustu mihinkään.	5
6 Aukko todistuksessa, esimerkiksi todistuksessa jää välistä jokin saatuun johtopäätökseen välttämätön vaihe.	5
7 Todistuksen heikentäminen, esimerkiksi todistaminen vain yhdelle esimerkkitapaukselle.	2

Taulukko 5.1: Virhekategoriat, jotka todistuksista (n=60) löytyvät

Yleisimmät virheet matemaattisessa päättelyssä liittyivät määritelmän väärinkäyttöön (8 kappaletta). Muut yleisimmät virhetyypit olivat laskusääntöjen väärinkäyttö sekä todistus, jossa ei ole järkeä. Virhekategoriaa aukko todistuksessa käytettiin tässä työssä ainoastaan silloin, kun vastaus ei selvästi sopinut muuhun kategoriaan.

Taulukossa 5.2 on todistuksissa (n=60) esiintyneitä virheitä jaoteltu tehtävittäin. Tutkituista tehtävistä ensimmäisessä oli selvästi eniten matemaattiselta päättelyltään hyväksyttäviä todistuksia. Toisessa tehtävässä hyväksyttäviä todistuksia oli alle puolet (7) ja eniten virheitä oli laskusääntöjen väärinkäytön osalta. Kolmannessa tehtävässä yli puolesta tutkituista vastauksista oli käytetty vektorien vapauden määritelmää vaillinaisesti.

Viimeisessä tutkitussa tehtävässä lähes puolet (7) todistuksista oli matemaattiselta päättelyltään hyviä.

Virhekategoria:	teht. 1	teht. 2	teht. 3	teht. 4
1 Todistuksen aloittaminen johtopäätöksellä	1	1		
2 Määritelmän väärinkäyttö:			8	
3 Laskusääntöjen väärinkäyttö:		3		1
4 Väärinkäytetty lause tai teoria		2		1
5 Todistuksessa ei järkeä		2	1	2
6 Aukko todistuksessa			2	3
7 Todistuksen heikentäminen			1	1
Matemaattisesti järkeviä todistuksia	14	7	5	7

Taulukko 5.2: Matemaattisen sisällön virheet tehtävittäin.

5.4 Yksittäisen opiskelijan todistamiskirjoituksen muuttuminen

Tässä kappaleessa esitetään opiskelijakohtaiset kuvailut opiskelijoiden todistamisen muuttumisesta tutkittujen tehtävien aikana.

Opiskelija 1. Hänen osaltaan kaikissa neljässä vastauksessa oletukset olivat selvästi erotettu väitteistä, kaikki merkinnät oli määritelty ja vastauksissa oli käytetty kokonaisia lauseita.

Opiskelija 2. Hänen vastauksissansa on jokaisessa tehtävässä vaikeuksia erottaa oletukset ja väite toisistaan, eikä tämän osalta ole kehitystä havaittavissa näiden neljän tehtävän aikana. Merkinnät on muuten määritelty, mutta opiskelija ottaa kertoimia käyttöön määrittelemättä niitä erikseen reaaliluvuiksi. Viimeisessä todistustehtävässä opiskelija on kokonaisten lauseiden tilalla käyttänyt nuolia viedessään todistusta eteenpäin, kun taas tehtävissä 1–3 hän on käyttänyt kokonaisia lauseita.

Opiskelija 3. Hän käyttää vastauksissaan kokonaisia lauseita ja määrittelee kaikki merkinnät. Tehtävää 3 lukuun ottamatta myös hänen kirjoittamat väitteet ja oletukset ovat selvästi erotettavissa toisistaan.

Opiskelija 4. Hän käyttää kaikissa vastauksissaan kokonaisia lauseita. Ainoastaan todistuksessa 2 opiskelija on selvästi erotellut oletukset ja väitteet toisistaan. Muissa kolmessa tehtävässä laskeminen alkaa suoraan ja ilman tehtävänantoa ei ole selvää, mitkä ovat oletuksia. Tehtävässä 2 opiskelija ei määrittele matriisia ja tehtävässä 3 ottaa käyttöön kertoimet r ja t, muttei määrittele näitä mitenkään. Myös tehtävässä 4 hän jättää tekemättä käyttöön otettujen kertoimien määrittelemisen reaaliluvuiksi.

Opiskelija 5. Opiskelija käyttää kaikissa vastauksissaan kokonaisia lauseita sekä määrittelee muuten kaikki käyttämänsä merkinnät, mutta jättää määrittelemättä käyttöön otetut kertoimet reaaliluvuiksi. Kolmessa ensimmäisessä vastauksessa oletukset ja väitteet erottaa erittäin selvästi toisistaan, mutta viimeisessä vastauksessa ei. Ensimmäisessä vastauksessa opiskelija on kirjoittanut "oletus", toisessa "halutaan osoittaa" ja kolmannessa on erikseen kolme vaihetta "oletukset", "väite" ja "todistus". Neljännessä tehtävässä hän aloittaa laskemisen suoraan eikä käy selväksi, mitkä ovat oletuksia.

Opiskelija 6. Ensimmäisessä tehtävässä on erikseen merkitty alkuun kolme vaihetta "oletus", "väitös" ja "todistus". Toisessa tehtävässä ei käy ilmi ollenkaan, mitä oletetaan, vaan aloitetaan suoraan tekemään laskuja matriiseilla. Myös tehtävissä 3 ja 4 hän aloittaa laskemisen suoraan "Jos jono on sidottu, niin" -tyylisesti. Opiskelija kirjoittaa kokonaisia lauseita ja määrittelee kaikki muut merkinnät paitsi tehtävän 2 matriisin.

Opiskelija 7. Kaikissa muissa paitsi tehtävässä 2 opiskelija kirjaa oletuksen ja väitteen erikseen. Hän kirjoittaa kokonaisia lauseita ja määrittelee kaikki muut käyttämänsä merkinnät paitsi tehtävän 2 matriisin.

Opiskelija 8. Hän kirjaa oletukset tehtävän alkuun, mutta ei kerro, että ne ovat oletuksia. Määrittelyissä hän unohtaa tehtävissä 3 ja 4 määritellä käyttöönsä ottamat kertoimet reaaliluvuiksi. Lisäksi tehtävässä 4 opiskelija ottaa merkinnän L käyttöön kertomatta, että merkitsee sillä lineaarikuvausta. Hän kirjoittaa kokonaisia lauseita kaikissa vastauksissaan.

Opiskelija 9. Kaikissa vastauksissaan hän käyttää kokonaisia lauseita ja määrittelee muuten kaikki merkinnät, mutta tehtävässä 4 ottaa kesken todistuksen käyttöön merkinnän, jota ei määrittele mitenkään. Kaikissa tehtävissä on selvästi eroteltavissa oletukset ja väitteet toisistaan.

Opiskelija 10. Hän käyttää vastauksissaan lyhennettä "Ol." merkitsemään oletusta sekä kvanttorimerkintää *on olemassa*, vaikka voisi hyvin käyttää suomen kielen sanoja. Tehtävässä 2 hän jättää matriisin määrittelemättä sekä kesken tehtävän 4 ottaa käyttöön vektorimerkinnän, jota ei määrittele. Tehtävissä 1 ja 2 lukijalle on melko selvää, milloin puhutaan oletuksista ja milloin väitteistä, mutta vasta tehtävissä 3 ja 4 käyttää ensimmäistä kertaa merkintää "Ol.".

Opiskelija 11. Opiskelija määrittelee kaikki muut käyttämänsä merkinnät paitsi matriisin tehtävässä 2. Vastauksessa 2 hän käyttää vastauksessa epämääräisiä nuolia, mutta tehtävässä 4 kokonaisia lauseita. Tehtävässä 3 opiskelija käyttää implikaationuolia yhtälönratkaisussa, mutta muuten kokonaisia lauseita. Tehtävissä 2 ja 4 tehdään selvät oletukset, mutta tehtävässä 1 tiedot on vain kerätty ylös ja tehtävässä 3 lähdetään suoraan laskemaan.

Opiskelija 12. Hän kirjoittaa kokonaisia lauseita kaikissa todistuksissaan. Tehtävässä 2 hän ei suoraan määrittele, että A on matriisi, mutta kirjoittaa, että "tutkitaan matriisien tuloa". Kaikissa hänen vastauksissaan on oletukset merkitty selvästi.

Opiskelija 13. Kaikissa opiskelijan vastauksissa on alkuun selvä oletus. Tehtävässä 1 hän käyttää sanoja niukasti, mutta riittävästi. Tehtävässä 2 ei ole sanoja, vaan epämääräiset nuolet vievät vastausta eteenpäin. Muuten opiskelija käyttää kokonaisia lauseita. Tehtävässä 3 määritellään selvästi käytetyt merkinnät, mutta tehtävässä 2 ja 4 jää myös merkintöjä määrittelemättä.

Opiskelija 14. Tehtävissä 1, 2 ja 4 oletukset ovat selkeästi merkittyinä, mutta tehtävässä 3 näin ei tapahdu. Opiskelijalta jää määrittelemättä tehtävässä 2 matriisi sekä tehtävissä 3 ja 4 hän ottaa kertoimia käyttöön määrittelemättä niitä erikseen reaaliluvuiksi. Vastauksissaan opiskelija käyttää kokonaisia lauseita ja lisäksi tehtävissä 1 ja 2 käyttää todistusvaiheiden numerointia selkeyttämään todistusta.

Opiskelija 15. Vastauksen 2 neliömatriisi jää opiskelijalta määrittelemättä. Kaikissa muissa paitsi todistuksessa 2 on vastauksista selvää, mitkä ovat oletuksia ja mitkä väitteitä. Hän käyttää muuten kokonaisia lauseita, mutta tehtävässä 2 käyttää tähtimerkintää, jolla viittaa muutamaa riviä alemmaksi, jossa perustelee käyttämänsä laskutoimituksen. Tehtävässä 4 käyttää myös *kaikki*-kvanttorimerkintää.

Yhdellä vastaajalla huomaa parannuksen systemaattisesti tehtävistä 1 ja 2 tehtäviin 3 ja 4. Hän käyttää tehtävässä 3 ensimmäistä kertaa merkintää "Ol." ja jatkaa tätä seuraavassa tehtävässä. Toinen muutos on kahden opiskelijan taantuminen, sillä tehtävissä 2 ja 3 on väitteet selvästi, mutta tehtävässä 4 ei enää näin ole merkitty.

Käytettyjen merkintöjen määrittelemisessä ei vastaajilla ole havaittavissa kokonaisuudessa muutosta. Tehtävässä 1 kaikki on määritellyt muuttujat ja merkinnät, mutta yksittäisillä vastaajilla on sekalaisesti puutteita merkinnöissä muiden vastauksien osalta. Kaikki, jotka ovat jättäneet tehtävässä 3 reaalilukukertoimet määrittelemättä, jättävät ne määrittelemättä myös vastauksessa 4. Eniten on jätetty määrittelemättä tehtävän 2 matriisia.

Yksi vastaaja on tehtävässä 2 käyttänyt epämääräisiä nuolia todistuksen eteenpäin viemisessä. Tehtävissä 3 ja 4 hän käyttää pelkästään kokonaisia lauseita ja tehtävän 3 yhtälössä implikaationuolia. Hänen voidaan ajatella parantaneen ratkaisujaan, vaikka ei suoraviivaisessa tehtävässä 1 käyttänyt nuolia. Yhdellä vastaajalla tehtävien 1–3 kokonaisten lauseiden jälkeen oli tehtävässä 4 nuolia viemässä todistusta seuraavaan vaiheeseen. Muiden osalta ei ollut kokonaisuudessa havaittavissa muutosta tehtävien aikana.

Luku 6

Pohdintaa

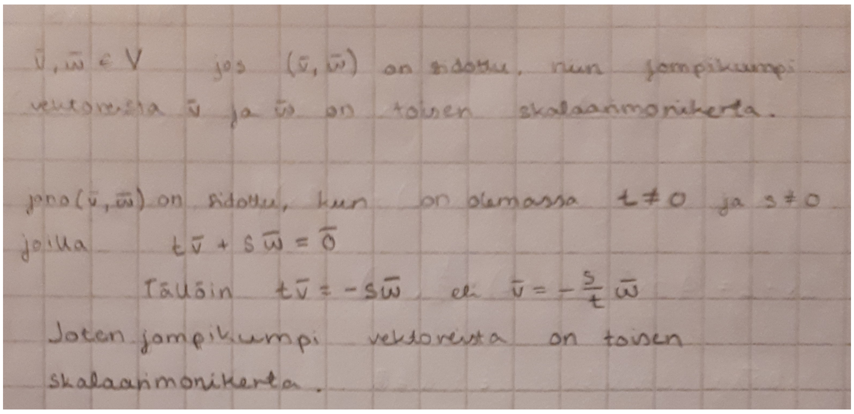
Tässä luvussa on pohdintaa ensin tutkimuksen tuloksista kappaleessa 6.1, jonka jälkeen kappaleessa 6.2 pohdin tutkimuksen luotettavuutta. Tutkimuksen viimeisessä kappaleessa 6.3 mietitään mahdollisuuksia jatkotutkimuksiin sekä tutkimuksen vaikutusta omaan opettajuuteen.

Opiskelijoiden todistuksia tutkittiin ensin sen mukaan, voitaisiinko niitä pitää matemaattisesti hyväksyttävinä todistuksina. Toisessa vaiheessa jätettiin todistuksen kirjoittamiseen liittyvät tyyliasiat huomiotta ja tutkittiin, minkälaisia olivat todistusten matemaattiset virheet. Lopuksi havainnoitiin opiskelijan tekemien todistusten kehittymistä noin puolen vuoden ajanjakson aikana.

6.1 Tuloksista

Noin kolmasosaa opiskelijoiden kirjoittamista todistuksista todettiin tässä tutkimuksessa matemaattisesti hyväksyttäviksi todistuksiksi. Niissä todistuksissa, joita ei pidetty matemaattisesti hyväksyttävinä, yleisin virhe oli puuttellisesti muotoillut määritelmät sekä merkinnät, joita ei lukijalle selitetty.

Tehtävittäin tarkasteltuna ensimmäisen tehtävän yleisin virhe oli, että oletukset ja väitteet eivät olleet vastauksessa selvästi erotettavissa toisistaan. Tehtävässä 2 yleisin virhe merkinnöissä oli, ettei itse vastauksessa määritelty merkintää A (neliö)matriisiksi ollenkaan. Tehtävässä 3 suurin osa virheistä on kuvan 6.1 esimerkkivastauksen tyylisiä, joissa jää määrittelemättä kertoimet reaaliluvuiksi. Tehtävän 4 todistuksessa virheitä tuli siitä, kun kesken todistuksen otettiin käyttöön jokin uusi merkintä ilman, että lukijalle kerrotaan, mitä merkinnällä tarkoitetaan. Esimerkiksi kuvan 6.2 todistuksessa otetaan kesken todistuksen käyttöön merkintä λ ilman määrittelyä.



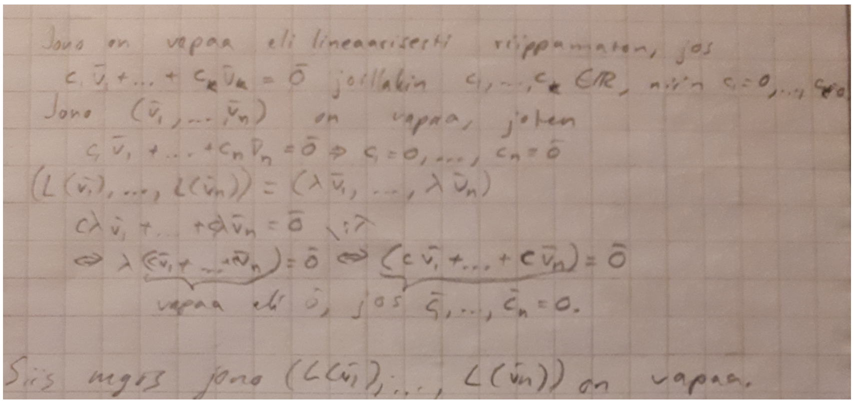
$\bar{v}, \bar{w} \in V$ jos $(\bar{v}, \bar{w})$ on sidottu, niin jompikumpi vektoreista $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ on toisen skalaarimonikerta.

jono $(\bar{v}, \bar{w})$ on sidottu, kun on olemassa $t \neq 0$ ja $s \neq 0$ joilla $t\bar{v} + s\bar{w} = \bar{0}$

Tällöin $t\bar{v} = -s\bar{w}$ eli $\bar{v} = -\frac{s}{t}\bar{w}$

Joten jompikumpi vektoreista on toisen skalaarimonikerta.

Kuva 6.1: Merkintöjä t ja s ei määritellä täsmällisesti.



Jono on vapaa eli lineaarisesti riippumaton, jos

$c_1\bar{v}_1 + \dots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$ jollakin $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$, niin $c_1 = 0, \dots, c_k = 0$.

Jono $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ on vapaa, joten

$c_1\bar{v}_1 + \dots + c_n\bar{v}_n = \bar{0} \Rightarrow c_1 = 0, \dots, c_n = \bar{0}$

$(L(\bar{v}_1), \dots, L(\bar{v}_n)) = (\lambda\bar{v}_1, \dots, \lambda\bar{v}_n)$

$c\lambda\bar{v}_1 + \dots + c\lambda\bar{v}_n = \bar{0} \quad | : \lambda$

$\Leftrightarrow \lambda(\underbrace{c\bar{v}_1 + \dots + c\bar{v}_n}) = \bar{0} \Leftrightarrow (\underbrace{c\bar{v}_1 + \dots + c\bar{v}_n}) = \bar{0}$

vapaa eli $\bar{0}$, jos $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n = 0$.

Siis myös jono $(L(\bar{v}_1), \dots, L(\bar{v}_n))$ on vapaa.

Kuva 6.2: Kesken tehtävän otetaan käyttöön merkintä, jota ei määritellä.

Tarkasteltaessa tehtäviä kokonaisuudessaan, ei tällä otannalla voi hyväksyttävien todistusten määristä päätellä kehittymistä (tai taantumista) opiskelijoiden todistusten osalta. Tehtävittäin lueteltuna hyväksyttävien todistusten määrä oli 7, 4, 4 ja 6 (15 tutkittua vastausta tehtävää kohden). Toisaalta ensimmäisen tutkitun tehtävän todistus oli selvästi yksinkertaisempi kuin seuraavien, joten mahdollisesti todistaminen oli alkamassa kehittyä.

Oletusten ja väitteiden merkitsemisessä oli havaittavissa kehittymistä viimeisiä todistustehtäviä kohden. Tehtävissä 3 ja 4 oli useammassa vastauksessa selvästi erotettavissa oletukset ja väitteet toisistaan kuin kahdessa ensimmäisessä tehtävässä. Kokonaisuudessaan virheiden määrä ei kuitenkaan juuri laskenut viimeisiin tehtäviin, vaan tällöin suurin osa virheistä liittyi uusien käytettyjen merkintöjen määrittelemiseen.

Johtopäätöksiin ja matemaattiseen sisältöön liittyvät virheet olivat pitkälti tehtäväkohtaisia. Matriisitehtävässä virheet liittyivät pääsääntöisesti matriisien laskusääntöjen unohtamiseen tai vaillinaisin tiedoin käänteismatriisin päättelemiseen. Tehtävässä 3 hankaluudet tulivat, kun jonon vapauden määritelmän perusteella tehtiin oletus sidotusta jonosta, jolloin johtopäätös jäi puolittaiseksi.

Kurssin käsitteet ovat myös pääsääntöisesti opiskelijoille uusia. Matriisit eivät sisälly lukion oppimäärään ja vektoreitakin on lukiossa vain yksi kurssi [25]. Näin ollaan opiskelijoiden kannalta tilanteessa, jossa otetaan vielä asiasisältöä haltuun ja yritetään ymmärtää oppimaansa samalla, kun siitä pitäisi kirjoittaa todistuksia.

Seldenin ja Seldenin [30] tutkimuksessa on esitetty jatkokysymyksenä, esiintyykö tietynlaisia päättelyvirheitä enemmän esimerkiksi algebran kurssilla kuin topologian kurssilla. Tämän tutkimuksen perusteella näin voisi olettaa olevan, koska tehtäväkohtaiset erot eri virheiden määrissä on korkeat. Opettajan kannalta olisi hyödyllistä opetusta suunnitellessa tietää kurssin tai tehtävän yleisimmät väärät tulkinnat.

Lopuksi tutkittiin vielä yksittäisen opiskelijan todistamisen kehittymistä näiden kahden kurssin aikana. Kokonaisuudessaan yksittäisen opiskelijan todistaminen ei käytännössä näiden tehtävien aikana osoittanut kehittymisen merkkejä. Niistä opiskelijoita, joilla oli kurssin ensimmäisissä tehtävissä selvimmät puutteet oletusten merkitsemisessä, vain yksi korjasi merkitsemistään viimeisiin tehtäviin.

Toisaalta lukiosta tullaan vajavaisella todistuskokemuksella yliopistoon, mutta näiden tehtävien perusteella näytti siltä, että suurin osa opiskelijoista ei lähes puolen vuoden jakson aikana kyennyt muuttamaan todistamistaan matemaattisemman esityksen suuntaan.

Tutkittujen tehtävien perusteella kokonaisuudessaan kahden opiskelijan todistamisen voidaan sanoa selkeytyneen ensimmäisistä tehtävistä viimeisiin tehtäviin. Suurimmalla osalla vastaajista tapahtui jompikumpi seuraavista: Joko vastausten malli säilyi samana ja virheet olivat toistuvia tai sitten virheet esiintyivät satunnaisesti (esimerkiksi tehtävissä 2 ja 4 oletukset ja väitteet määritelty, mutta tehtävässä 3 ei).

Vaikka pientä kehittymistä oli havaittavissa, niin kokonaisuudessaan olisin sekä joukon että yksittäisen opiskelijan osalta odottanut selkeämpiä tuloksia todistamisen kehittymisen puolesta. Onko todistamaan oppimisen prosessi sen verta hidas, että alle puolen vuoden jaksolla ei kehitysaskeleet vielä välttämättä näy?

6.2 Tutkimuksen luotettavuus

Laadullisen tutkimuksen totuutta ja objektiivisuutta arvioitaessa nousee erikseen esiin havaintojen luotettavuus ja niiden puolueettomuus [35, s. 160]. Aikaisemmin esimerkiksi hoitotieteen pro gradu -töissä tutkijan puolueettomuutta on perusteltu tutkijan tietotaidolla asiasta, mutta nykyisin sen ei ajatella suoraan edustavan puolueettomuutta [35, s. 160]. Kuitenkin se, että tutkija on käynyt tutkittavana olleet kurssit itse aikaisemmin, voidaan katsoa antavan tutkijalle edellytykset arvioida kurssin tehtäviä.

Tehtävien analysointi on tässä tutkimuksessa ollut subjektiivista. Kuitenkin analysoinnin osalta puolueettomuutta on pyritty varmistamaan sillä, että epäselvät tehtävät on käyty läpi useamman kerran ja useampaan eri otteeseen. Myös esimerkkitodistusten avulla on pyritty tuomaan lukijalle kuva, miten tutkimuksessa todistuksia on arvioitu ja näin lisätty luotettavuutta. Lisäksi matemaattisen sisällön virhekategoriat pohjautuvat aikaisempaan tutkimukseen.

Tutkimus on tehty eettisesti kestävin periaattein. On ollut tutkittavien tiedossa, että heidän palauttamiaan tehtäviä saatetaan käyttää kurssia koskevassa tutkimuksessa. Mistään tehtävästä ei pysty erottamaan yksittäistä vastaajaa nimeltä tai opiskelijanumerolta. Myös tutkijalle tutkittavat opiskelijat ovat olleet vain kurssitunnuksin tunnistettavissa.

Tässä tutkielmassa todistuksia on luettu tehtävänannosta irrallisina. Näin ollen opiskelijoiden vastauksilta on oletusten ja väitteiden kirjaamisen osalta vaadittu enemmän kuin yleisesti on tapana. Myös kurssilla, johon opiskelijat ovat osallistuneet, on voinut vastauksissaan olettaa tehtävänannon oletusten (esimerkiksi "A on neliömatriisi") olevan voimassa automaattisesti aloittaessaan vastaamaan tehtävään. Osa vastaajista on edellisen johdosta tehtävässä 2 lähtenyt laskemaan matriisin A avulla, vaikkei vastauksessaan kertonut sitä matriisiksi. Muihin tutkimuskohtiin tällä ei kuitenkaan ole suurta merkitystä. Kyseisessä vastauksessa seitsemällä opiskelijalla oli ongelmia määritelmien kanssa ja näistä kuudella oli virheitä myös oletusten ja väitteiden erottelemisessa toisistaan.

Tutkimuksen systemaattinen otanta vastannee hyvin sitä 87 opiskelijan joukkoa, joka on palauttanut kaikki tehtävät. Kyseenalaiseksi jää kuitenkin, kuinka hyvin tämä 87 opiskelijan joukko vastaa koko kurssin kuvassa yli 300-400 opiskelijan joukkoa, joka ei ainakaan kaikkiin tehtäviin palauttanut vastauksia. Lisäksi ei tiedetä, mikä oli tehtäviä palauttaneiden tai analysoitujen opiskelijoiden pääaine.

6.3 Jatkoon ja omaan opetukseen

Jatkossa todistamisen kehittymistä voisi tutkia pidemmällä ajanjaksolla ja siten, että tutkittavat tehtävät olisivat keskenään enemmän samantyylisiä. Tai siten, että samantyyliset tehtävät jakautuisivat tasaisemmin tutkintajakson alkuun ja loppuun. Näin olisi mahdollista tutkia todistamisen kehittymistä paremmin myös matemaattisen sisällön ja johtopäätösten tekemisen pohjalta. Nyt kaksi samantyylisintä tehtävää olivat molemmat tarkastelujakson kaksi viimeisintä.

Todistamistaitojen tutkiminen aihealueilla, jotka ovat tutkittavilla varmasti hallussa, poistaisi epäilyksen tutkittavien sisällönhallinnasta. Tällöin arviointi kohdistuisi selkeämmin todistuksen muotoiluun ja itse todistamiseen.

Yksi tutkimuksen aihe olisi myös, miten todistamisen lisääminen lukion opetussuunnitelmaan 2016 tai sähköisen ylioppilaskirjoituksen tulo 2019 vaikuttaa opiskelijoiden todistamisen osaamiseen yliopistolla. Vaikuttaako todistamisopetuksen lisääminen lukiossa selvästi yliopisto-opiskelijoiden todistusosaamista? Toisaalta kumpaan suuntaan matematiikan ylioppilaskokeen sähköistyminen vaikuttaa - kirjoittavatko opiskelijat jäsennellympiä vastauksia vai viekö sähköisten laitteiden hallinnan opiskelu enemmän aikaa? Mikäli näitä halutaan tutkia, nyt olisi oiva hetki, kun oletettavasti syksystä 2019 alkaen opiskelijoita aloittaa laitoksella molemmista lähtökohdista.

Oma opetukseni painottuu tällä hetkellä yläasteen matematiikan puolelle. Siinä vaiheessa opintoja “$0 = 0$” todistukset ja kokeilut tehtävissä ovat sinällään helppoja, mutta ne voivat olla vaarallisia jatkon kannalta. Edelleen tutkimusta tehdessä nousi esiin ajatus siitä, kuinka tärkeää on alusta pitäen opetuksessa korostaa perusteluiden ja välivaiheiden merkitystä. Samoin se, että perusteluina saa (ja jopa pitää) käyttää sanoja. Lisäksi siinä vaiheessa, kun todistusta aletaan opettaa ja harjoitella, niin tärkeää tehdä heti ero oletusten ja väitteiden välillä.

Lähdeluettelo

[1] Back, R-J., Kavander, T., Nylund, M., Peltomäki, M., Salakoski, T. & von Wright, J. (2002) Matemaattinen todistaminen ja abstrahointi lukion matematiikan opetuksessa - opetuskokeilu rakenteisten johtojen avulla. Aineenopettajankoulutuksen vaihtoehdot ja tutkimus 2002, Ainedidaktiikan symposiumi 1.2.2002, 24–33, 2002.

[2] Back, R-J. (2008) Matematiikkaa logiikan avulla - Logiikka ja rakenteiset päättelyketjut. TUCS Lecture Notes, No. 11.

[3] Back, R-J. (2009) Matematiikkaa logiikan avulla - Rakenteiset päättelyketjut yleisenä todistusmuotona. TUCS Lecture Notes, No. 12.

[4] CadwalladerOlsker, T. (2011) What Do We Mean by Mathematical Proof? Journal of Humanistic Mathematics, Vol. 1, issue 1, 33-60.

[5] de Villiers, M. (1990) The role and function of proof in mathematics. Pythagoras, 24, 17-24.

[6] Drisko, J. & Maschi, T. (2015) Content Analysis. Pocket Guide to Social Work Research. New York: Oxford University Press.

[7] Griffiths, P. A. (2000) Mathematics at the turn of the millennium. American Mathematical Monthly, 107(1), 1-14.

[8] Hanna, G. (1990) Some pedagogical aspects of proof. Interchange, 21(1), 6-13.

[9] Harel, G., & Sowder, L (2007) Toward a comprehensive perspective on proof. Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (toim. F. Lester). National Council of Teachers of Mathematics.

[10] Heiskanen, P., Kaakinen P., Lehtonen J., Leikas M. & Tahvanainen J. (2017) Tekijä Pitkä matematiikka 11 Lukuteoria ja todistaminen. SanomaPro Oy.

[11] Helsingin yliopisto. Johdatus yliopistomatematiikkaan 2014 -kurssisivut. Luettu 17.7.2018 https://wiki.helsinki.fi/display/mathstatKurssit/Johdatus+yliopistomatematiikkaan%2C+syksy+2014

[12] Helsingin yliopisto. Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I 2014 -kurssisivut. Luettu 15.7.2018 https://wiki.helsinki.fi/display/mathstatKurssit/Lineaarialgebra+ja+matriisilaskenta+I%2C+syksy+2014

[13] Hersh, R. (1993) Proving is convincing and explaining. Educational Studies in Mathematics, 24(4), 389-399.

[14] Karjalainen, T. (2011) Eroja lukio- ja yliopistomatematiikassa erityisesti lukion differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssissa. Pro gradu -tutkielma. Tampereen yliopisto, informaatiotieteiden yksikkö.

[15] Knapp, J. (2005) Learning to prove in order to prove to learn. Luettu 25.7.2018 http://mathpost.asu.edu/~sjgm/issues/2005_spring/SJGM_knapp.pdf

[16] Kögce, D. & Yildiz, C. (2011) A comparision of freshman and senior mathematics student teachers' views of proof concept. Procedia Social and Behavioral Sciences 15 (2011), 1266–1270.

[17] Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (2010) Thinking mathematically, second edition. Pearson Education Limited.

[18] Metsämuuronen, J. (2011) Laadullisen tutkimuksen käsikirja. 1. uudistettu laitos. International Methelp Oy.

[19] Moore, R. (1994) Making the transition to formal proof. Educational Studies in Mathematics 27 (1994), 249-266

[20] Niiniluoto, I. (2015) Logiikan historia. Luettu 13.7.2018 http://filosofia.fi/node/7000

[21] Oinonen, L. (2016) Johdatus yliopistomatematiikkaan. Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos.

[22] Opetushallitus. (2003) Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003.

[23] Opetushallitus. (2004) Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 2004.

[24] Opetushallitus. (2014) Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 2014.

[25] Opetushallitus. (2015) Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015.

[26] Pinto, M. & Tall, D. (1999) Student constructions of formal theory: giving and extracting meaning. Proceedings of the 23rd PME International Conference, 4, 65-72

[27] Renz P. (1981) Mathematical proof: What it is and what it ought to be. The Two-Year College Mathematics Journal Vol. 12, No. 2 (Mar., 1981), 83-103

[28] Rintala, V. & Virtanen, A. (2003) Logiikan peruskurssi. Tampereen yliopisto, matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos.

[29] Selden, A. & Selden, J. (2003) Errors and misconceptions in college level theorem proving, alun perin julkaistu Proceedings of the Second International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics, Vol. III, Cornell University, July 1987, 457-470

[30] Selden, A. & Selden, J. (2003) The Genre of Proof.

[31] Sundström (Raman), M. (2003) Key ideas: What are they and how can they help us understand people view proof? Educational Studies in Mathematics, 52(3): 319-325

[32] Tall, D. (1989) The nature of mathematical proof, Mathematics Teaching, 127, 28-32.

[33] Tall, D. (1991) The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. Tall D. O. (ed.) Advanced Mathematical Thinking, Kluwer: Holland, 3–21 (1991)

[34] Thurston, W. P. (1994) On proof and progress in mathematics. Bulletin of the AMS, 30, 161-177.

[35] Tuomi, J. & Sarajärvi, A. (2018) Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi, uudistettu laitos. Kustannusosakeyhtiö Tammi. Helsinki.

[36] Viertola, A-K. (2011) Todistaminen lukion pitkässä matematiikassa. Pro gradu - tutkielma. Jyväskylän yliopisto, matematiikan laitos.

[37] Vikberg, T., Oinonen, L. & Rämö, J. (2015). Tehostettu kisällioppiminen matematiikan yliopisto-opetuksessa. Yliopistopedagogiikka, 22(1), 36-39. Saatavilla `https://lehti.yliopistopedagogiikka.fi/2015/03/26/tehostettu-kisallioppiminen-matematiikan-yliopisto-opetuksessa/`

[38] Weber, K. (2003). Students' difficulties with proof. In A. Selden and J. Selden (Eds.) Research Sampler, 8. Luettu 14.7.2018 `https://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/research-sampler-8-students-difficulties-with-proof`